



TESIS - SM 142501

**ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK  
MIKROKUTUB YANG MELALUI BOLA  
BERPORI DIPENGARUHI OLEH KONVEKSI  
CAMPURAN DAN MEDAN MAGNET**

CHARISMA JUNI K  
NRP 6111650012001

DOSEN PEMBIMBING:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp.

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2018





THESIS - SM 142501

**MICROPOLAR MAGNETOHYDRODYNAMIC  
FLUID FLOW THROUGH A POROUS SPHERE  
EFFECTED BY MIXED CONVECTION AND  
MAGNETIC FIELD**

CHARISMA JUNI K  
NRP 6111650012001

SUPERVISOR:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp.

MASTER PROGRAM  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATING AND DATA SCIENCE  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2018

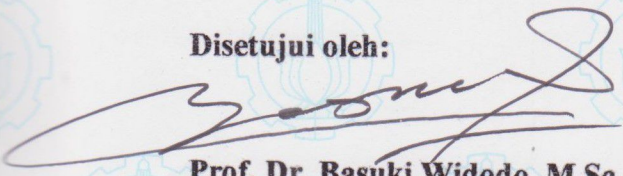


**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)  
di  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

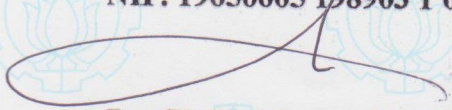
**Oleh:  
Charisma Juni Kumalasari  
NRP. 0611 1650 012 001**

**Tanggal Ujian : 24 Juli 2018  
Periode Wisuda : September 2018**

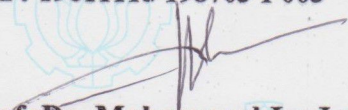
**Disetujui oleh:**

  
**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002**

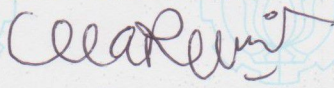
**(Pembimbing I)**

  
**Dr. Chairul Imron, ML. Komp.  
NIP: 19611115 198703 1 003**

**(Pembimbing II)**

  
**Prof. Dr. Mohammad Isa Irawan, M.T  
NIP. 19631225 198903 1 001**

**(Penguji)**


  
**Dr. Dra. Mardlijah, M.T  
NIP. 19670114 199102 2 001**

**(Penguji)**

  
**Dr. Dwi Ratna Sulistyningrum, S.Si., M.T.  
NIP. 19690405 199403 2 003**

**(Penguji)**



  
**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002**



**ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK  
MIKROKUTUB YANG MELALUI BOLA BERPORI  
DIPENGARUHI OLEH KONVEKSI CAMPURAN DAN  
MEDAN MAGNET**

Nama Mahasiswa : CHARISMA JUNI K  
NRP : 6111650012001  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Chairul Imron, M.I. Komp.

**Abstrak**

Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Magnetohidrodinamika (MHD) dapat diartikan suatu pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Konveksi bebas terjadi ketika gerakan mencampur sebagai akibat dari perbedaan kerapatan yang disebabkan gradien temperatur, sedangkan konveksi paksa terjadi ketika gerakan mencampur disebabkan oleh suatu alat tertentu dari luar, selanjutnya untuk konveksi campuran adalah gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa. Pada penelitian ini dikaji dan diteliti pengaruh adanya konveksi campuran dan medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub secara teori dengan membuat model matematikanya dan selanjutnya disimulasikan secara numerik untuk mengkaji pengaruhnya terhadap kurva kecepatan, mikrorotasi dan temperatur pada lapisan batas. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar parameter magnetik ( $M$ ), bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter porositas ( $\phi$ ), dan parameter micropolar ( $K$ ) maka kecepatan fluida semakin menurun, profil mikrorotasi semakin meningkat kemudian menurun, profil mikrorotasi semakin meningkat kemudian menurun, dan temperatur semakin menurun.

***Kata-kunci:*** Magnetohidrodinamika, Fluida Mikrokutub, Konveksi Campuran, Skema Keller-Box.





# MICROPOLAR MAGNETOHYDRODYNAMIC FLUID FLOW THROUGH A POROUS SPHERE EFFECTED BY MIXED CONVECTION AND MAGNETIC FIELD

Name : CHARISMA JUNI K  
NRP : 6111650012001  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Chairul Imron, M.I. Komp.

## Abstract

*Micropolar fluid is a fluid with the structure micro that composed of rigid particles that oriented randomly in a viscous media with the ability microrotasi. Magnetohydrodynamic (MHD) can be defined as a movement of electrically conducting fluid flow under the effect of magnetic field. Free convection occurs when the movement of mixing as a result of the density difference caused by the temperature gradient, whereas forced convection occurs when the movement of mixing is caused by a particular tool from the outside, then mixed convection is a combination of free convection and forced convection flow. This research has reviewed and investigated the effect of both mixed convection and magnetic fields on the flow of fluid magnetohydrodynamic are unsteady on the boundary layer that flows through a porous sphere in the fluid micropolar in theory to create a model of math and then numerically simulated to assess its effect on the fluid flow velocity and temperature curves of the boundary layer. The simulation results show that the magnetic parameters ( $M$ ), Prandtl ( $Pr$ ), porosity parameters ( $\phi$ ), and micropolar parameters ( $K$ ), the fluid velocity decreases, the microrotation profile increases and decreases, the microrotation profile increases then decreases, and the temperature decreases.*

**Key-words:** Magnetohydrodynamic, Micropolar Fluid, Mixed Convection, Keller-Box Scheme



## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis diberikan suatu kesempatan untuk menyelesaikan tesis yang berjudul

### **ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIDRODINAMIK MIKROKUTUB YANG MELALUI BOLA BERPORI DIPENGARUHI OLEH KONVEKSI CAMPURAN DAN MEDAN MAGNET**

Tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Kepala Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Dr. Chairul Imron, M.I. Komp. selaku dosen pembimbing dalam penyelesaian tesis.
6. Prof.Dr. Mohamad Isa Irawan, M.T., Dr.Dra. Mardlijah, M.T., dan Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T. selaku dosen penguji dalam penyelesaian tesis ini.
7. Dr. Haraiyanto, M.Si. selaku dosen wali selama menempuh program studi Magister Matematika.
8. Ibu tercinta dan tersayang, Mas Gatot dan Mas Gepri yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Magister Matematika.
9. Teman-teman seperjuangan se-team yaitu Mas Lutfi, Mbak Fatin, Yola, Mbak Uli, dan Via yang telah menemani dan membantu berjuang bersama dalam penyelesaian tesis ini.

10. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika. Terimakasih banyak atas segala sesuatunya yang telah diberikan selama menjalani perkuliahan Magister Matematika.
11. Teman-teman angkatan saat mengerjakan di laboratorium secara bersama-sama, serta semua pihak yang telah memberikan do'a dan dukungannya kepada penulis, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR NOTASI	xix
BAB 1     PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Penelitian .....	2
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	3
BAB 2     KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Fluida .....	8
2.2.1 Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian .....	8
2.2.2 Fluida Mikrokutub .....	9
2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu .....	9
2.4 Aliran Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) .....	9
2.5 Magnetohidrodinamik (MHD) .....	10
2.6 Konveksi Campuran .....	12
2.7 Metode Beda Hingga ( <i>Finite Difference Method</i> ) .....	12
2.8 Skema Keller- <i>Box</i> .....	13
BAB 3     METODE PENELITIAN	15
3.1 Tahapan Penelitian .....	15
BAB 4     MODEL MATEMATIKA	17
4.1 Persamaan Pembangun .....	18
4.1.1 Persamaan Kontinuitas .....	18
4.1.2 Persamaan Momentum .....	21
4.1.3 Persamaan Momentum Angular .....	27
4.2 Persamaan Energi .....	30
4.3 Penurunan Persamaan Pembangun .....	33

4.4	Transformasi Variabel Tak-berdimensi .....	34
4.5	Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas .....	36
4.6	Fungsi Alir ( <i>Stream Function</i> ) .....	37
4.7	Persamaan Similaritas .....	38
BAB 5	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA .....	45
5.1	Penyelarasan Notasi .....	45
5.2	Diskritisasi Model .....	46
5.3	Pelinieran Model .....	49
5.4	Penyelesaian Sistem Persamaan Linier .....	55
5.5	Validasi Model .....	62
5.6	Simulasi dan Analisa Hasil .....	64
5.6.1	Pengaruh Parameter Magnetik .....	64
5.6.2	Pengaruh Parameter Konveksi .....	67
5.6.3	Pengaruh Bilangan Prandtl .....	69
5.6.4	Pengaruh Parameter Porositas .....	72
5.6.5	Pengaruh Parameter Micropolar .....	75
5.7	Diskusi Hasil Penelitian .....	78
BAB 6	KESIMPULAN DAN SARAN .....	79
6.1	Kesimpulan .....	79
6.2	Saran .....	80
	PERNYATAAN RESMI .....	81
	DAFTAR PUSTAKA .....	83
	LAMPIRAN .....	85
	BIOGRAFI PENULIS .....	115

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Keller-Box .....	13
Gambar 4.1	Model Fisik Aliran Fluida .....	17
Gambar 4.2	Koordinat Bola 3D .....	18
Gambar 4.3	Volume Kendali pada Aliran Fluida Masuk dan Keluar .	20
Gambar 4.4	Komponen Tegangan Arah x dan y pada Permukaan Elemen Fluida .....	23
Gambar 4.5	Komponen <i>Heat Flux</i> pada Volume Kendali .....	32
Gambar 5.1	Skema Beda Hingga Keller-box .....	47
Gambar 5.2	Profil kecepatan pada validasi model .....	63
Gambar 5.3	Profil microrotasi pada validasi model .....	63
Gambar 5.4	Grafik variasi parameter magnetic pada profil kecepatan	65
Gambar 5.5	Grafik variasi parameter magnetic pada profil microrotasi	66
Gambar 5.6	Grafik variasi parameter magnetic pada profil temperatur	66
Gambar 5.7	Grafik variasi parameter konveksi pada profil kecepatan	67
Gambar 5.8	Grafik variasi parameter konveksi pada profil microrotasi	68
Gambar 5.9	Grafik variasi parameter konveksi pada profil microrotasi	68
Gambar 5.10	Grafik variasi parameter konveksi pada profil temperatur	69
Gambar 5.11	Grafik variasi bilangan prandtl pada profil kecepatan . . .	70
Gambar 5.12	Grafik variasi bilangan prandtl pada profil microrotasi .	71
Gambar 5.13	Grafik variasi bilangan prandtl pada profil microrotasi .	71
Gambar 5.14	Grafik variasi bilangan prandtl pada profil temperatur .	72
Gambar 5.15	Grafik variasi parameter porositas pada profil kecepatan	73
Gambar 5.16	Grafik variasi parameter porositas pada profil microrotasi	73
Gambar 5.17	Grafik variasi parameter porositas pada profil microrotasi	74
Gambar 5.18	Grafik variasi parameter porositas pada profil temperatur	74
Gambar 5.19	Grafik variasi parameter micropolar pada profil kecepatan	76
Gambar 5.20	Grafik variasi parameter micropolar pada profil microrotasi .....	77
Gambar 5.21	Grafik variasi parameter micropolar pada profil microrotasi .....	77





## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Perkembangan Penelitian .....	6
Tabel 5.1	Data Validasi Profil Kecepatan dan Microrotasi .....	62
Tabel 5.2	Variasi Parameter Magnetic .....	64



## DAFTAR NOTASI

$a$	: Jari-jari Bola.
$B$	: Gaya Magnet.
$b$	: Induksi Medan Magnet.
$E$	: Medan Magnet.
$\sigma$	: Konduktivitas Listrik.
$erf$	: <i>error function</i> .
$F$	: Gaya.
$\mathbf{g}$	: Gaya Gravitasi.
$\mathbf{J}$	: Kerapatan Arus.
$K$	: Parameter <i>Micropolar</i> .
$M$	: Parameter Magnetik.
$N$	: Daerah Mikro Rotasi.
$\bar{N}$	: Dimensional Mikro Rotasi.
$N$	: Non Dimensional Mikro Rotasi.
$n$	: Konsentrasi.
$\bar{p}$	: Tekanan.
$\bar{r}(\bar{x})$	: Dimensional Jari-jari.
$r(x)$	: Jari-jari.
$Re$	: Reynolds Number.
$\bar{t}$	: Dimensional Waktu.
$t$	: Non Dimensional Waktu.
$\mathbf{u}$	: Kecepatan Fluida pada Vektor.
$u$	: Kecepatan Searah Sumbu $x$ .
$v$	: Kecepatan Searah Sumbu $y$ .
$u_e$	: Kecepatan <i>Free Stream</i> .
$U_\infty$	: Kecepatan Aliran Bebas.
$\rho$	: Densitas.
$\mu$	: Viskositas Dinamik.
$\phi$	: Parameter Porositas.
$K^*$	: Parameter Permeabilitas.
$\kappa$	: <i>Vortex</i> .
$\nu$	: Viskositas Kinematik.
$\eta$	: Variabel Similaritas.
$Pr$	: Bilangan Prandtl.



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu mekanika fluida dari waktu ke waktu semakin berkembang. Mekanika fluida banyak dijumpai dalam setiap aspek kehidupan manusia. Contohnya ialah pada proses pemindahan fluida (*fluid transport*) yang meliputi pasokan air minum, pasokan gas alam, dan pemipaan zat-zat kimia pada pabrik. Akan tetapi penelitian secara fisik membutuhkan biaya yang sangat mahal. Oleh karena itu dibutuhkan studi ilmu yang dapat mempresentasikan permasalahan dalam dunia nyata tersebut. Dalam hal ini, pemanfaatan magnet merupakan salah satu solusi yang sering ditawarkan.

Dalam hal ini, pemanfaatan magnet yang sering ditawarkan adalah *Magnetohydrodynamics* (MHD). Prinsip *Magnetohydrodynamics* (MHD) ditemukan oleh Michael Faraday pada tahun 1832. Dalam penggunaan *Magnetohydrodynamics* (MHD), dapat diketahui hubungan timbal-balik antara kecepatan aliran dan medan elektromagnet, yaitu aliran fluida yang menimbulkan medan magnet dan medan magnet yang menimbulkan aliran fluida. Selain itu, MHD dapat mengetahui perilaku dari suatu fluida yang dapat dimanfaatkan untuk mengurangi dampak negatifnya terhadap suatu benda. Dalam hal ini, istilah *Magnetohydrodynamics* terdiri dari kata *magneto* yang berarti medan magnet, *hydro* yang berarti cairan atau fluida dan *dynamic* yang berarti pergerakan. *Magnetohydrodynamics* (MHD) dapat diartikan suatu pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Fluida tersebut dapat berupa plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit.

Dalam penelitian ini, fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub. Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Teori tentang fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (Anggriani, *dkk*, 2016) dan membuat banyak peneliti berminat mengembangkan teori tersebut yakni salah satunya mengkaji tentang efek mikrorotasi terhadap fluida. Selanjutnya, aliran fluida tersebut mengalir melalui bola berpori bermagnet yang menimbulkan lapisan batas (*boundry layer*) karena adanya pengaruh gesekan. Lapisan batas adalah lapisan tipis pada permukaan padat atau *solid surface* yang terbatas pada daerah yang sangat sempit dekat dengan permukaan kontur dimana dipengaruhi oleh adanya viskositas maupun gaya inersia benda. Gaya inersia benda ini menunjukkan gaya yang diberikan oleh zat cair apapun berdasarkan keadaan geraknya.

Berbicara mengenai fluida mikrokutub, keberadaan perubahan temperatur pada fluida tersebut dapat dipengaruhi oleh adanya kekuatan dari luar,

selain dari pengaruh gaya apung pada fluida itu sendiri. Oleh karena itu, dapat dikatakan telah terjadi konveksi campuran pada aliran fluida tersebut. Konveksi campuran adalah gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa. Dalam hal ini, konveksi bebas terjadi ketika gerakan mencampur sebagai akibat dari perbedaan kerapatan yang disebabkan gradien temperatur, sedangkan konveksi paksa terjadi ketika gerakan mencampur disebabkan oleh suatu alat tertentu dari luar (Bejan, 2013). Selanjutnya, dari aliran tersebut dapat ditemukan kecepatan dan temperatur pada lapisan batas yang disekitar titik stagnasi bawah.

Upaya awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan lapisan batas yang terbentuk kemudian diformulasikan untuk mendapatkan persamaan lapisan batas dimensional. Lapisan batas dimensional tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensi. Aliran yang diteliti merupakan aliran *unsteady* sehingga persamaan kendali ditransformasikan ke dalam variabel similiaritas. Selanjutnya, untuk penyelesaian numeriknya menggunakan Skema Keller-Box menggunakan perangkat lunak MATLAB. Hasil numerik yang diperoleh, akan digunakan untuk menganalisa pengaruh parameter magnetik, mikropolar, porositas, konveksi campuran dan bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan, mikrorotasi dan temperatur pada lapisan batas.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik mikrokutub yang melalui bola berpori dari pengaruh konveksi campuran dan medan magnet?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik mikrokutub yang melalui bola berpori dari pengaruh konveksi campuran dan medan magnet dengan menggunakan metode Keller-Box?
3. Bagaimana pengaruh parameter mikropolar, parameter magnetik, parameter konveksi campuran, parameter porositas, dan bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan, mikrorotasi dan *temperature* pada lapisan batas?

## 1.3 Batasan Penelitian

Permasalahan-permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut :

1. Permasalahan yang diteliti adalah dalam sistem tak tunak (*unsteady*).
2. Fluida mengalir dari bawah ke atas.
3. Geometri benda pada penelitian ini yang diamati adalah bola berpori bermagnet.

4. Aliran fluida *incompressible* karena tidak dibawah pengaruh tekanan, dalam keadaan tak tunak, laminar dua dimensi yang mengalir secara seragam melintang pada daerah medan magnet.
5. Aliran fluida dua dimensi yang melewati bola berpori.
6. Penelitian difokuskan pada aliran lapisan batas yang terletak di sekitar titik stagnasi bawah, yaitu  $x = 0^\circ$  .
7. Tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga medan listrik diasumsikan nol.
8. Medan magnet dihasilkan dari gaya Lorentz.
9. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas bersama dengan gaya yang ditambahkan dengan perpindahan panas secara konveksi campuran.
10. Untuk mendapatkan penyelesaian model tersebut digunakan metode beda hingga implisit dengan skema Keller-Box.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah yang dibuat, maka tujuan dilaksanakannya penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membangun model matematika dari aliran fluida magnetohidrodinamik mikrokutub yang melalui bola berpori dari pengaruh konveksi campuran dan medan magnet.
2. Menganalisa pengaruh parameter mikropolar, parameter magnetik, parameter konveksi campuran, parameter porositas, dan bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan, mikrorotasi dan *temperature* pada lapisan batas.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Dengan dilakukannya penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi positif bagi pengembangan ilmu matematika terapan, seperti pada permasalahan pengeboran minyak, selain itu dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya.





## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. (Widodo ,*dkk*, 2015) : Pada penelitian ini menjelaskan mengenai solusi numerik aliran magnetohidrodinamik tak tunak pada konveksi paksa dan perpindahan panas pada fluida kental yang melalui bola dengan menggunakan metode Keller-*Box*. Hasil yang diperoleh dari solusi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika parameter magnetik bertambah maka distribusi temperatur fluida berkurang dan ketika parameter magnetik berkurang maka distribusi kecepatan fluida juga berkurang.
2. (Anggriani, 2016) : Pada penelitian ini menjelaskan mengenai pengaruh parameter magnetik dan permeabilitas terhadap profil kecepatan dan mikrorotasi pada lapisan batas dengan menggunakan metode Keller-*Box*. Hasil yang diperoleh dari solusi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin meningkat parameter magnetik maka semakin meningkat profil kecepatan aliran. Sedangkan pada profil mikrorotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter magnetik pada aliran pekat, maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar*. Semakin meningkat parameter permeabilitas maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida. Sedangkan pada profil mikrorotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter permeabilitas pada aliran pekat, maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter permeabilitas maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar*.
3. (Rahma, 2017) : Pada penelitian ini dikaji perbandingan parameter, yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi paksa, parameter porositas, dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur dengan cara mengembangkan model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melalui bola berpori dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-*Box*. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kurva kecepatan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter magnetik, konveksi paksa, dan porositas, sedangkan semakin

menurun dengan bertambahnya parameter permeabilitas. Untuk peningkatan bilangan Prandtl tidak mempengaruhi kecepatan fluida saat konveksi paksa. Kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetic, konveksi paksa, bilangan Prandtl, dan porositas, sedangkan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter permeabilitas.

4. (Pratomo, 2017) : Pada penelitian ini dikaji dan diteliti pengaruh medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet secara teori dengan mengkonstruksi model matematikanya dan kemudian model matematika yang diperoleh akan diselesaikan secara numerik dengan skema Keller-Box. Hasil dari penelitian menunjukkan semakin besar parameter magnetik maka semakin meningkat pula profil kecepatan aliran fluida mikrokutub. Selain itu, semakin besar parameter bahan maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida mikrokutub dan juga semakin besar parameter magnetik maka profil mikrorotasi akan semakin kecil untuk  $n = 0$ . Sedangkan untuk  $n = 0.5$  dan  $n = 1$ , semakin besar parameter magnetik maka profil mikrorotasi akan semakin besar.

Dalam penelitian ini kami meneliti tentang pengaruh adanya konveksi campuran dan medan magnet pada aliran fluida magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub. Dapat di lihat seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Perkembangan Penelitian

N o	Nama Peneliti	Judul	Ben- da	Mag- net Pada Bola	Metode	Flui- da	Keterangan
1.	Widodo, <i>dkk</i> (2015)	<i>The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magneto-hydrodynamics Boundary Layer flow of A Viscous Fluid Past A Sphere.</i>	Bola Pejal	Ada	Keller- Box	Flui- da Ken- tal	Dalam penelitian ini mengkaji pengaruh bilangan Prandtl dan parameter magnetik terhadap kecepatan dan temperatur pada lapisan batas dengan pengaruh medan magnet dan konveksi paksa.

2.	Anggri- ani ( 2016 )	Pengaruh Magneto- hidrodinamik (MHD) pada Fluida Micropolar yang melewati Bola Berpori	Bola Ber- pori	Tidak	Keller- <i>Box</i>	Fluida Micro- polar	Dalam penelitian ini mengkaji pengaruh parameter magnetik dan permeabilitas terhadap profil kecepatan dan mikrorotasi pada lapisan batas.
3.	Rahma ( 2017 )	Konveksi Paksa dari Aliran Fluida Magneto- hidrodinamik Tak Tunak yang melalui Bola Berpori	Bola Ber- pori	Ada	Keller- <i>Box</i>	Fluida Kental	Dalam penelitian ini mengkaji perbandingan parameter, yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi paksa, parameter porositas, dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur.
4.	Pra- tomo (2017)	Magneto- hidrodinamik yang Tak Tunak pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola di dalam Fluida Mikro kutub dibawah pengaruh Medan Magnet.	Bola Ber- pori	Ada	Keller- <i>Box</i>	Fluida Mikro- kutub	Dalam penelitian ini mengkaji pengaruh parameter magnetik dan parameter bahan terhadap profil kecepatan dan profil mikrorotasi aliran fluida mikro kutub.

5.	Penelitian Kumalasari (2018)	Aliran Fluida Magneto-hidrodinamik Mikrokutub yang Melalui Bola Berpori dibawah pengaruh Konveksi Campuran dan Medan Magnet.	Bola Berpori	Ada	Keller-Box	Fluida Mikrokutub	Dalam penelitian ini mengkaji pengaruh parameter micropolar, parameter magnetik, parameter konveksi campuran, parameter porositas, dan parameter micropolar terhadap kurva kecepatan, mikrorotasi dan <i>temperature</i> pada lapisan batas.
----	------------------------------	--	--------------	-----	------------	-------------------	--

## 2.2 Fluida

Fluida adalah suatu zat yang memiliki kemampuan berubah bentuk secara *continue* apabila dikenakan tegangan geser (Widodo, 2012). Tegangan geser adalah perbandingan gaya geser dengan luar permukaan sedangkan gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan. Secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\tau = \frac{F_{geser}}{A}$$

dengan

$\tau$  = tegangan geser ( $N/m^2$ )

$F_{geser}$  = Gaya geser ( $N$ )

$A$  = Luas permukaan ( $m^2$ )

Perbedaan zat cair dan gas adalah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan tekanan.

### 2.2.1 Fluida Newtonian dan Fluida Non-Newtonian

Berdasarkan karakteristiknya, fluida fase cair dibagi menjadi dua, yaitu *Newtonian Fluid* dan *Non-Newtonian Fluid*. Setiap fluida *Newtonian* mengarah pada gerakan dari fluida yang hanya diatur oleh hukum gerak Newton (Fox, dkk, 2011). Contoh dari fluida *Newtonian* adalah udara, air, minyak, dan fluida nano. Sedangkan, Fluida *Non-Newtonian* adalah fluida yang tegangan gesernya tidak linier terhadap laju regangan geser. Contohnya

adalah fluida mikrokutub. Fluida yang akan digunakan pada penelitian ini adalah fluida mikrokutub yang termasuk dalam fluida *Non-Newtonian*.

### 2.2.2 Fluida Mikrokutub

Fluida mikrokutub adalah fluida dengan struktur mikro yang terdiri dari partikel kaku yang berorientasi secara acak pada media kental yang memiliki kemampuan mikrorotasi. Teori tentang fluida mikrokutub pertama kali diperkenalkan oleh Eringen (Anggriani, *dkk*, 2016) dan membuat banyak peneliti berminat mengembangkan teori tersebut yakni salah satunya mengkaji tentang efek mikrorotasi terhadap fluida. Dalam fluida mikrokutub, partikel kaku terkandung di dalam elemen volume kecil yang dapat memutar pusat volume dijelaskan oleh vektor mikrorotasi (Satya Narayana *dkk*. 2013; Uddin dan Kumar. 2013; Widodo *dkk*. 2016). Dalam kehidupan sehari-hari, fluida yang termasuk golongan mikrokutub adalah cairan koloid, suspensi polimer, suspensi lumpur, dan cairan di pembuluh darah manusia dan hewan (Abdel-Rahman. 2009; Uddin dan Kumar. 2013).

Sifat yang menarik dari fluida mikrokutub ialah, walaupun termasuk golongan fluida tak kental (*inviscid*), model dari mikrokutubnya dapat disimpulkan ke dalam persamaan Navier-Stokes yang digunakan dalam fluida kental (viskos). Hal tersebut karena sifat dari fluida mikrokutub yang menyerupai fluida viskos klasik yang menjauhi permukaan objeknya.

### 2.3 Aliran Fluida Berdasarkan Waktu

Aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu : (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady State*) berarti kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady State*) berarti kecepatan aliran fluida dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

### 2.4 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Lapisan batas adalah suatu lapisan yang terbentuk di sekitar penampang suatu benda yang dilalui fluida akibat faktor gesekan dan viskositas fluida. Teori lapisan batas dikemukakan oleh Ludwig Prandtl seorang ahli aerodinamika asal Jerman pada tahun 1904. Sebelumnya pada tahun 1755, seorang ahli hidrodinamika bernama Leonhard Euler mengemukakan aliran tanpa gesekan dan kemudian dinyatakan ke dalam persamaan Euler. Dengan banyaknya kontradiksi terhadap hasil eksperimennya, persamaan Euler dijelaskan dan dikaji lebih rinci untuk kondisi aliran bergesekan oleh Navier pada tahun 1827 dan oleh Stokes pada tahun 1845 yang sekarang dikenal

dengan persamaan Navier-Stokes.

Lapisan batas atau *Boundry Layer* adalah lapisan tipis pada permukaan padat atau *solid surface* yang terbatas pada daerah yang sangat sempit dekat dengan permukaan kontur dimana dipengaruhi oleh adanya viskositas maupun gaya inersia benda. Gaya inersia benda ini menunjukkan gaya yang diberikan oleh zat cair apapun berdasarkan keadaan geraknya. Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi, dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

1. Aliran Laminar

Aliran laminar adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida kurang dari 500 ( $Re < 500$ ) atau pada saat fluida bergerak perlahan dengan kecepatan yang kecil dan atau fluida memiliki tingkat kekentalan atau viskositas yang besar.

2. Aliran Transisi

Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen karena terjadi perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida berkisar antara 500 sampai 12.500 ( $500 < Re < 12.500$ ).

3. Aliran Turbulen

Aliran turbulen adalah aliran yang partikel-partikelnya bergerak secara acak dan tidak beraturan. Aliran ini terjadi ketika bilangan Reynolds fluida lebih dari 12.500 ( $Re > 12.500$ ).

Bilangan Reynold untuk suatu aliran fluida dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut :

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{V}$$

dengan

- $Re$  = Bilangan Reynolds
- $U_{\infty}$  = Kecepatan pada aliran bebas ( $m/s$ )
- $a$  = Panjang karakteristik
- $V$  = Viskositas kinematic

## 2.5 Magnetohidrodinamik (MHD)

Istilah *Magnetohydrodynamics* terdiri dari kata *magneto* yang berarti medan magnet, *hydro* yang berarti cairan atau fluida dan *dynamic* yang berarti pergerakan. *Magnetohydrodynamics* (MHD) dapat diartikan suatu pergerakan aliran fluida penghantar listrik dibawah pengaruh medan magnet. Fluida tersebut dapat berupa plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit.

Bentuk persamaan MHD merupakan kombinasi persamaan Navier-Stokes

pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik (Arber, 2013). Bentuk persamaan MHD tersebut yaitu meliputi persamaan momentum, persamaan konservasi massa, persamaan konservasi energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

1. Persamaan momentum

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{p} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

2. Persamaan konservasi massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

dengan

- $\mathbf{B}$  = Medan magnet  $(0, 0, B)$
- $\mathbf{E}$  = Medan listrik  $(0, 0, E)$
- $\mathbf{V}$  = Kecepatan massa plasma
- $\mathbf{J}$  = Kerapatan arus
- $\rho$  = Massa jenis
- $p$  = Tekanan plasma
- $t$  = Waktu
- $\mu_0$  = Permeabilitas ruang hampa  $(4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)$

Pada persamaan MHD di atas, persamaan  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$  pada persamaan Maxwell tidak digunakan. Persamaan  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  hanya digunakan saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol (Arber, 2013). Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{p} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

## 2.6 Konveksi Campuran

Istilah konveksi digunakan untuk perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain akibat perpindahan bahannya sendiri (Fellows, 1990). Perpindahan panas konveksi dapat diklasifikasikan dalam tiga kategori yaitu konveksi bebas (*free convection*), konveksi paksa (*forced convection*) dan konveksi campuran (*mixed convection*). Konveksi bebas terjadi ketika gerakan mencampur sebagai akibat dari perbedaan kerapatan yang disebabkan gradien temperatur, sedangkan konveksi paksa terjadi ketika gerakan mencampur disebabkan oleh suatu alat tertentu dari luar, selanjutnya untuk konveksi campuran adalah gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa (Bejan, 2013).

Ketika berhadapan dengan perpindahan panas atau konveksi secara khusus, bilangan Prandtl yang muncul. Bilangan Prandtl merupakan rasio antara difusi momentum dengan difusi termal (Uddin dan Kumar, 2013). Bilangan Prandtl terkecil menyebabkan konduktivitas termal lebih tinggi. Berdasarkan teori lapisan batas, bilangan bilangan Prandtl rendah sesuai dengan distribusi temperatur yang lebih luas, sementara bilangan Prandtl tinggi menunjukkan profil temperatur yang lebih kecil (Ishak, 2010; Prasad, 2013). Kurangnya variasi dalam kecepatan dan profil temperatur dapat disebabkan oleh berkurangnya bilangan Prandtl. Meningkatnya nilai dari bilangan Prandtl juga dapat menyebabkan bilangan Nusselt lokal menjadi lebih tinggi (Prasad, 2013) dan meningkatnya koefisien gesekan kulit lokal *skin friction*. Sebagai tambahan, solusi numerik dari permasalahan ini juga ada dan dapat ditingkatkan dengan meningkatkan bilangan Prandtl (Ishak, 2010).

## 2.7 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan differensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Secara umum, metode beda hingga memiliki tiga pendekatan yaitu sebagai berikut :

1. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$



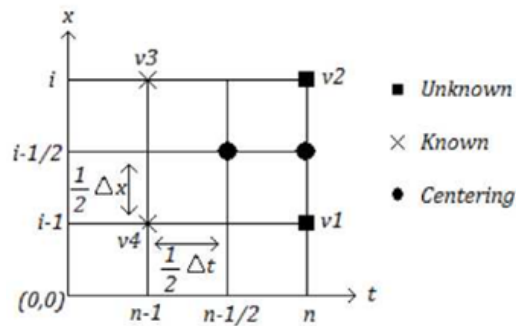
### 3. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Dalam metode beda hingga, biasa dikenal metode beda hingga eksplisit dan metode beda hingga implisit. Baik metode hingga eksplisit maupun metode beda hingga implisit mempunyai keunggulan masing-masing dalam menentukan penyelesaian numerik persamaan diferensial. Namun, metode beda hingga implisit lebih unggul dalam kestabilan bila dibandingkan dengan metode beda hingga eksplisit.

#### 2.8 Skema Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Dalam hal ini, karena model yang dihasilkan adalah *non-linear* sehingga perlu dicarikan solusi numerik yang mudah, efisien, dan akurat. Ada beberapa pilihan untuk memilih metodenya, yaitu : Metode Keller-Box, Metode Beda Hingga Implisit, Metode Beda Hingga Eksplisit, dan Volume Hingga. Metode Beda Hingga Implisit mempunyai kekurangan waktu konvergensinya, lama untuk akurasi yang lebih bagus. Selanjutnya, untuk Metode Beda Hingga Eksplisit memerlukan uji konsistensi, konvergensi, akurasi, selain itu membutuhkan waktu komputasi yang lama. Selanjutnya, untuk Volume Hingga membutuhkan ketelitian untuk merubah sistem persamaan ke dalam bentuk Volume Hingga. Oleh karena itu, Dalam penelitian ini memilih skema Keller-Box karena skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana *step size* untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan differensial parsial parabolic lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu (Al-Shibani *dkk*, 2012). Berikut ini merupakan Skema Keller-Box :



Gambar 2.1: Skema Keller-Box (Al-Shibani *dkk*, 2012)

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada gambar 2.1 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}v_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(v_i + v_{i-1}) \\u^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(u^n + u^{n-1})\end{aligned}$$

Karena menggunakan titik-titik pada setiap ukuran setengah maka secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}(\cdot)_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_i^{n-1}] \\(\cdot)_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_{i-1}^n]\end{aligned}$$

Sedangkan, skema beda hingga untuk turunan secara umum :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial v} &= \frac{(\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}}{\Delta x} \\\frac{\partial(\cdot)}{\partial u} &= \frac{(\cdot)^n - (\cdot)^{n-1}}{\Delta t}\end{aligned}$$

## BAB 3

### METODE PENELITIAN

Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

#### 3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Studi Literatur

Mengkaji model matematika aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola berpori. Setiap model matematika mempunyai sifat dan karakteristik tertentu, sehingga untuk mengembangkan model matematika perlu dikaji terlebih dahulu agar mendapatkan model matematika yang sesuai dengan yang diharapkan.

2. Konstruksi Model Matematika

Proses konstruksi model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet. Selanjutnya, Mengembangkannya dengan menggunakan *continuum principle* dan hukum-hukum fisika.

3. Penyelesaian numerik dengan menggunakan skema Keller-Box

Proses penyelesaian model matematika yang diperoleh dengan skema Keller-Box adalah sebagai berikut :

- (a) Persamaan similaritas dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet diubah ke persamaan berorde satu.
- (b) Proses diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat.
- (c) Proses linierisasi persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
- (d) Penyelesaian hasil linearisasi dilakukan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

4. Simulasi

Membuat algoritma program. Program yang telah dibuat selanjutnya dapat digunakan untuk melakukan simulasi model dalam permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir

melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub dibawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet. Persamaan similaritas yang telah diselesaikan diterapkan dalam pemograman.

5. Analisa Hasil dan Pembahasan

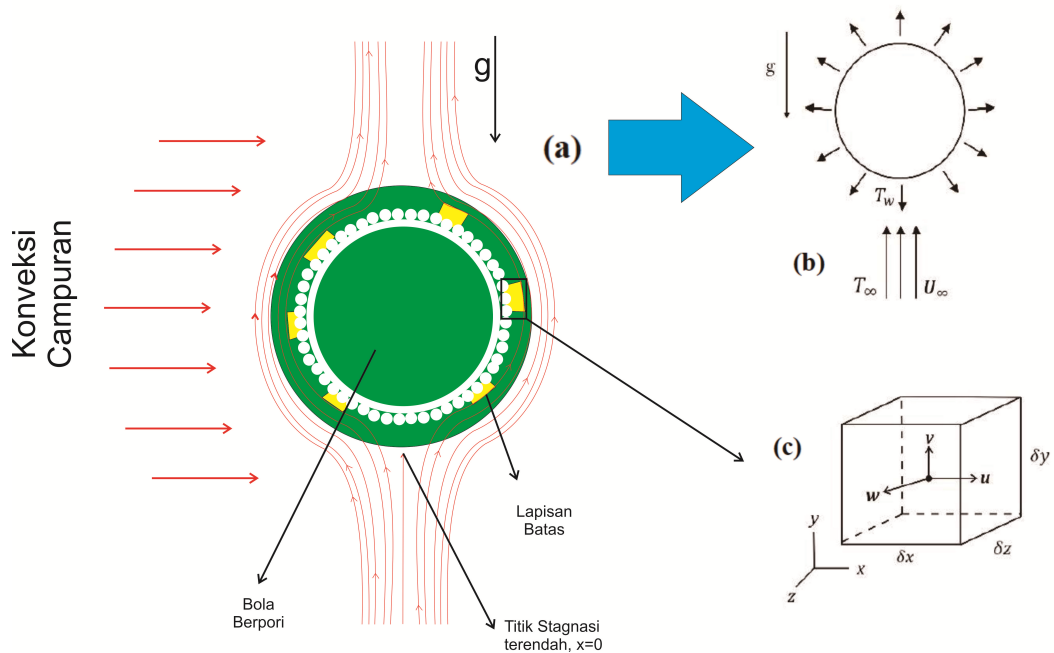
Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari aliran fluida tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida mikrokutub yang melalui suatu bola berpori dibawah pengaruh konveksi campuran dan medan magnet. Selanjutnya dibuat kesimpulan dari masalah yang dikaji.

6. Pembuatan Laporan

7. Diseminasi Hasil Penelitian

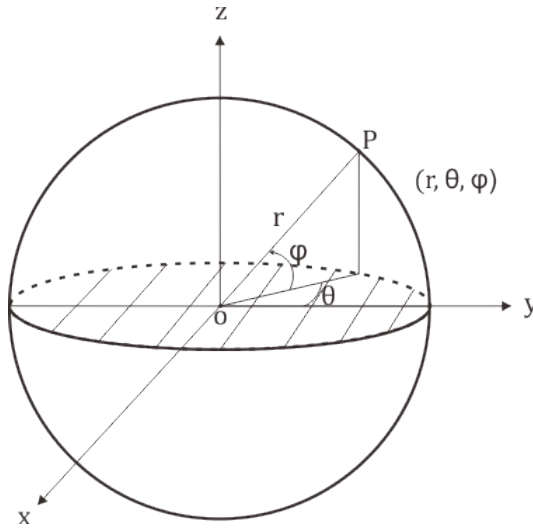
## BAB 4 MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai persamaan pembangun (*governing equation*) untuk membangun model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub yang dipengaruhi oleh medan magnet dan konveksi campuran. Dalam hal ini, bentuk model matematikanya adalah berdimensi kemudian ditransformasikan ke bentuk model matematika yang tak berdimensi dan selanjutnya dibentuk model similaritas. Pada penelitian ini, fluida mikrokutub tidak bermagnet mengalir dari bawah ke atas melalui bola berpori yang memuat magnet seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1(a).



Gambar 4.1: (a) Model Fisik Aliran Fluida yang Melalui Bola Berpori (b) Sketsa Aliran Fluida yang Melewati Bola Berpori, (c) Volume Kendali

Pada Gambar 4.1(b), suhu aliran fluida sebelum melalui bola berpori adalah  $T_\infty$ , suhu permukaan fluida saat melalui bola berpori adalah  $T$  dan kecepatan fluida sebelum melalui bola berpori adalah  $U_\infty$ . Pada Gambar 4.1(c) merupakan pendekatan volume kendali. Pada Gambar 4.2 merupakan koordinat bola 3D.



Gambar 4.2: Koordinat Bola 3D

Sesuai dengan gambaran pada area yang diamati, model fisik dari permasalahan ini menggunakan hukum kekekalan massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika sehingga dapat dibangun persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi.

#### 4.1 Persamaan Pembangun

Dalam penelitian ini menggunakan Persamaan pembangun, yaitu Persamaan kontinuitas, Persamaan momentum linear, Persamaan momentum angular dan Persamaan energi yang diuraikan dari Hukum kekekalan massa, Hukum II Newton, dan Hukum I Termodinamika. Selanjutnya, akan diuraikan persamaan-persamaan pembangunnya, sebagai berikut :

##### 4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Pada penelitian ini, dari suatu lapisan batas yang terbentuk dapat dikonstruksikan persamaan kontinuitas. Persamaan kontinuitas dapat diperoleh berdasarkan hukum konservasi massa. Hukum konservasi massa merupakan laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan, dapat dituliskan sebagai berikut (Potter dkk, 2012):

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan  $\frac{D()}{Dt}$  adalah material dan  $M_{sys}$  adalah massa sistem yang sama dengan jumlah dari semua perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada sistem tersebut yang dapat dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (4.2)$$

dengan  $\rho$  adalah densitas fluida dan  $\forall$  adalah volume fluida. Selanjutnya, substitusikan Persamaan (4.2) ke Persamaan (4.1) sehingga dapat diperoleh

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho d\forall = 0 \quad (4.3)$$

Berdasarkan teorema Pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem adalah

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{CV} \rho d\forall + \iint_{CS} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.4)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) maka dapat diperoleh

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho d\forall = \frac{D}{Dt} \iiint_{CV} \rho d\forall + \iint_{CS} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.5)$$

dengan

$\mathbf{u} = (u, v, 0)$  adalah komponen kecepatan fluida yang tegak lurus.

$\hat{n}$  adalah vektor normal terhadap elemen  $dA$ .

$\rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$  adalah laju aliran massa melalui  $dA$ .

Dalam hal ini, dikarenakan  $\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0$  maka persamaan (4.5) dapat dituliskan menjadi persamaan volume kendali untuk kekal massa sebagai berikut :

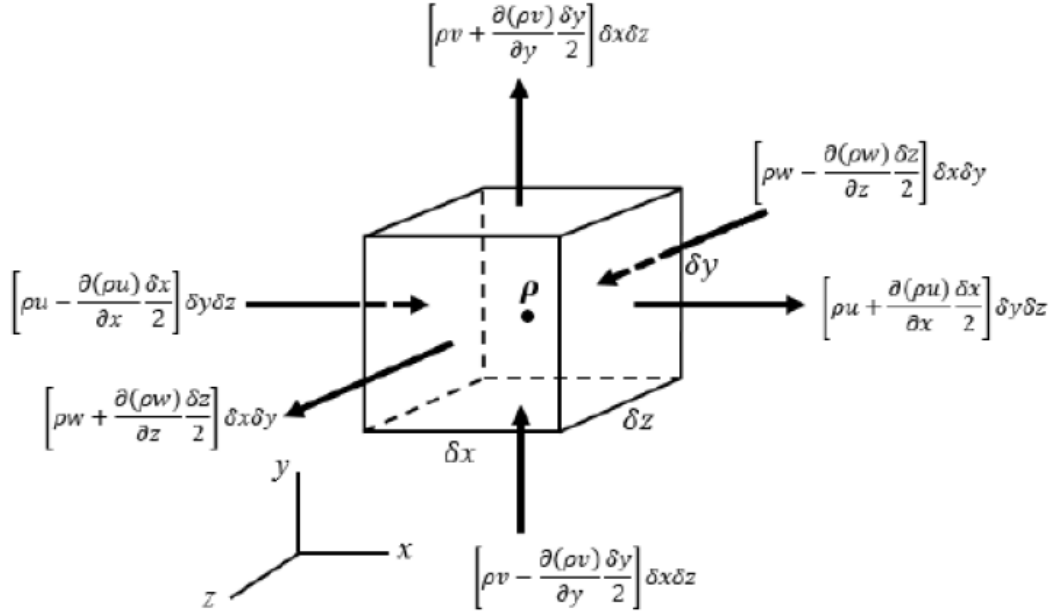
$$\frac{D}{Dt} \iiint_{CV} \rho d\forall + \iint_{CS} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4.6)$$

Selanjutnya, dimisalkan volume kendali yang digunakan merupakan sebuah elemen kubus kecil dalam keadaan diam seperti pada Gambar 4.1(c). Pada bagian pusat elemen terdapat densitas  $\rho$  dan komponen kecepatan  $u$ ,  $v$ , dan  $w$ . Dalam hal ini, elemen diasumsikan kecil maka laju perubahan terhadap waktu dari massa yang berasal dari kandungan volume kendali yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho d\forall \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.7)$$

Sesuai pada Gambar 4.3, jumlah aliran massa pada permukaan elemen dapat diperoleh melalui sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Aliran massa pada sumbu- $x$  digambarkan dengan jumlah massa aliran yang masuk dan keluar terdapat pada bagian pusat elemen. Aliran yang keluar didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho u|_{x+\frac{\partial x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \quad (4.8)$$



Gambar 4.3: Volume Kendali pada Aliran Fluida Masuk dan Keluar

sedangkan untuk aliran yang masuk didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho u|_{x-\frac{\partial x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \quad (4.9)$$

Sesuai pada persamaan (4.8) dan persamaan (4.9) maka jumlah aliran massa yang keluar pada sumbu-x didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

Dengan cara yang sama sesuai pada Persamaan (4.8) dan (4.9) maka jumlah aliran massa yang keluar pada sumbu-y didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

sedangkan jumlah aliran massa yang keluar pada sumbu-z didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)$$

Oleh karena itu, total aliran dari Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)$$



sedangkan laju perubahan waktu dari massa sistem didapat dari substitusi Persamaan (4.7) dan (4.13) ke Persamaan (4.6) yaitu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.14)$$

Dalam hal ini, jika kedua ruas Persamaan (4.14) dibagi dengan  $\delta x \delta y \delta z$  maka didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

karena pada penelitian ini, aliran fluida diasumsikan sebagai aliran dua dimensi maka Persamaan (4.15) menjadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

Selanjutnya, Persamaan (4.15) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (4.17)$$

Untuk fluida yang *incompressible* maka laju perubahan densitas sangat kecil sehingga mendekati nol atau densitasnya konstan, maka Persamaan (4.17) dapat ditulis :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

#### 4.1.2 Persamaan Momentum

Persamaan momentum dapat diperoleh berdasarkan Hukum Newton II, yaitu jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan laju perubahan momentumnya pada sistem tersebut. Momentum didefinisikan sebagai hasil kali massa dengan kecepatan sehingga momentum dari sebuah partikel kecil dinotasikan dengan  $\rho \mathbf{u} dV$ . Karena itu, momentum dari seluruh sistem dapat dinyatakan dengan notasi  $\int_{sys} \rho \mathbf{u} dV$ .

Dalam hal ini, Persamaan Momentum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho \mathbf{u} dV + \iint_{CS} \rho \mathbf{u} \cdot \bar{n} dA = \iiint_{CV} \mathbf{F} dV \quad (4.18)$$

Berdasarkan Teorema Gauss, Persamaan (4.18) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned} \iiint_{CV} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV + \iiint_{CV} \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) dV &= \iiint_{CV} \mathbf{F} dV \\ \rho \left[ \iiint_{CV} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right) dV \right] &= \iiint_{CV} \mathbf{F} dV \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dalam hal ini,  $\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}$ , karena  $\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  maka  $\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , sehingga Persamaan (4.19) menjadi :

$$\rho \left[ \iiint_{CV} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dV \right] = \iiint_{CV} \mathbf{F} dV$$

Selanjutnya, dalam bentuk turunan, maka persamaan momentum dapat ditulis menjadi :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} \quad (4.20)$$

Dalam hal ini,  $\mathbf{F}$  merupakan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan bola berpori sehingga Persamaan (4.20) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{mag} \quad (4.21)$$

dengan

$\mathbf{F}_s$  adalah gaya permukaan.

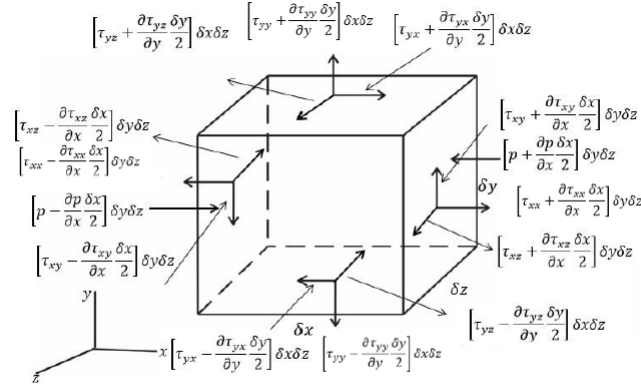
$\mathbf{F}_{buo}$  adalah gaya apung.

$\mathbf{F}_a$  adalah gaya angular.

$\mathbf{F}_{mag}$  adalah gaya magnet.

#### 4.1.2.1 Gaya Permukaan (*Surface Force*)

Gaya yang bekerja pada elemen sebagai hasil interaksi dengan materi sekeliling disebut gaya permukaan ( $\mathbf{F}_s$ ). Sesuai pada Gambar 4.3, gaya-gaya permukaan yang bekerja pada elemen kubus kecil suatu fluida dapat dinyatakan dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan. Tegangan-tegangan tersebut diantaranya terdapat tegangan normal dan tegangan geser ( $\tau$ ) yang dapat diperoleh dari *Control Surface* sebagai berikut:



Gambar 4.4: Komponen Tegangan Arah x dan y pada Permukaan Elemen Fluida

Jumlah seluruh gaya pada arah sumbu-x dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{sx} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Jumlah seluruh gaya pada arah sumbu-y dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{sy} = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

Jumlah seluruh gaya pada arah sumbu-z dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{sz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Sehingga dapat diperoleh resultan gaya permukaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \mathbf{F}_{sx}\hat{i} + \mathbf{F}_{sy}\hat{j} + \mathbf{F}_{sz}\hat{k} \\ \mathbf{F}_s &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa fluidanya adalah fluida mikroktub yang tak mampu mampat (*incompressible*), sehingga tegangan-tegangannya sebanding dengan laju deformasi, yaitu:

#### 1. Tegangan Normal

$$\tau_{xx} = 2(\mu + k) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.23)$$

$$\tau_{yy} = 2(\mu + k) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.24)$$

$$\tau_{zz} = 2(\mu + k) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.25)$$

## 2. Tegangan Geser

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} = (\mu + k) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = (\mu + k) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = (\mu + k) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.26}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.23)-(4.26) ke Persamaan (4.23) maka diperoleh sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_s = -\nabla p + (\mu + k)\nabla^2 \cdot \mathbf{u}\tag{4.27}$$

### 4.1.2.2 Gaya Apung (*Buoyancy*)

Dalam penelitian ini, gaya apung dapat dituliskan sebagai berikut :

$$F_{buo} = \rho \mathbf{g}$$

Sedangkan untuk tekanan  $p$  pada Persamaan (4.27) dapat dituliskan dengan pernyataan bahwa :

$$p = p_d + p_h$$

dengan  $p_h$  adalah tekanan hidrostatik dan  $p_d$  adalah tekanan dinamik. Selanjutnya, bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik dapat dituliskan menjadi :

$$\nabla p_h = p_\infty \mathbf{g}\tag{4.28}$$

dengan  $\rho_\infty$  adalah massa jenis fluida di luar area lapisan batas. Selanjutnya, bentuk  $-\nabla p$  pada Persamaan (4.27) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$-\nabla p_d - \nabla p_h = -\nabla p_d - \rho_\infty \mathbf{g}\tag{4.29}$$

Selanjutnya,  $p_d$  dituliskan tanpa menggunakan tanda subskrip ' $d$ '.

### 4.1.2.3 Gaya Angular

Pada penelitian ini fluida yang digunakan adalah fluida mikrokutub. Dalam hal ini, fluida mikrokutub memiliki kemampuan mikrorotasi sehingga terdapat gaya angular. Gaya angular yang berpengaruh pada sistem adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_a = \rho \mathbf{f} + k(\nabla \times \mathbf{N})$$

karena aliran fluida mikrokutub diasumsikan adalah *incompressible* maka koefisien materialnya bernilai konstan, sehingga  $\mu > 0$  dan gaya  $\mathbf{f} = 0$  (Kucaba-Pietal : 2004), dengan demikian gaya angularnya dapat diperoleh menjadi :

$$\mathbf{F}_a = k(\nabla \times \mathbf{N})\tag{4.30}$$

#### 4.1.2.4 Gaya Magnetik (*Magnetic Force*)

Gaya magnetik total yang bekerja pada muatan  $\sigma$  yang bergerak di dalam daerah tersebut biasa dikenal dengan Gaya Lorentz. Gaya Lorentz dalam persamaan momentum karena adanya medan magnet, maka Gaya Lorentz dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.31)$$

dengan

$\mathbf{E}$  adalah medan listrik.

$\mathbf{J}$  adalah massa jenis arus.

$\mathbf{B}$  adalah total medan magnet yang terjadi dalam sistem.

Berdasarkan hukum Ohm, massa jenis arus dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.32)$$

dengan  $\sigma$  adalah konduktifitas listrik. Selanjutnya, substitusikan Persamaan (4.32) ke Persamaan (4.31) sehingga dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida, akibatnya medan listrik ( $\mathbf{E}$ ) sama dengan nol. Dengan demikian, Persamaan (4.33) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.34)$$

Selanjutnya,  $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_0$  dengan  $\mathbf{B}$  adalah medan magnet total.  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$  adalah medan magnet dari bola berpori yang mengandung magnet.  $\mathbf{b}$  adalah besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh bola bermagnet (Mohammad, 2014). Sehingga dapat diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0$$

dengan

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) &= (vB_0)i - (uB_0)j + 0k \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh :

$$\begin{aligned}
((\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ vB_0 & -uB_0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \\
&= -(uB_0^2)i, -(vB_0^2)j, 0k
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) \quad (4.35)$$

Selanjutnya, Persamaan (4.35) dapat dituliskan ke dalam bentuk vektor sebagai berikut :

$$\mathbf{F}_{mag} = -\sigma(B_0)^2 \mathbf{v} \quad (4.36)$$

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai aliran fluida mikrokutub yang dipengaruhi oleh medan magnet (MHD). Permasalahan aliran fluida yang melalui bola berpori dapat digunakan Hukum Darcy (Jat, 2012). Berdasarkan Hukum Darcy mengenai gaya yang bekerja pada fluida  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , bahwa:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \quad (4.37)$$

dengan  $K^*$  adalah permeabilitas benda dan  $\mu$  adalah viskositas fluida. Selanjutnya, karena  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_{mag}$  dan  $\mathbf{F}_{mag} = -\sigma(B_0)^2 \mathbf{v}$ , maka Persamaan (4.37) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{F} = -\sigma(B_0)^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \quad (4.38)$$

Dengan demikian, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.27), Persamaan (4.29), Persamaan (4.30) dan Persamaan (4.38) ke Persamaan (4.21) diperoleh persamaan momentum sebagai berikut :

1. Persamaan momentum linier sumbu- $x$  :

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
&+ (\rho - \rho_\infty)g_x + k \frac{\partial N}{\partial y} + \sigma(B_0)^2 u \\
&+ \frac{\mu}{K^*} u
\end{aligned} \quad (4.39)$$

2. Persamaan momentum linier sumbu- $y$  :

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
&+ (\rho - \rho_\infty)g_y - k \frac{\partial N}{\partial x} + \sigma(B_0)^2 v \\
&+ \frac{\mu}{K^*} v
\end{aligned} \quad (4.40)$$

3. Persamaan momentum linier sumbu- $z$  :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\mu}{K^*} w \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan pada bola berpori, sehingga perubahan kecepatan dan tekanan pada arah sumbu- $z$  sangat kecil sehingga diasumsikan nol. Oleh karena itu, dapat diperoleh persamaan Momentum linear sebagai berikut :

1. Persamaan momentum linier sumbu- $x$  :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &- \rho \beta (T - T_\infty) g_x + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} + \sigma (B_0)^2 u \\ &+ \frac{\mu}{K^*} u \end{aligned} \quad (4.42)$$

2. Persamaan momentum linier sumbu- $y$  :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &- \rho \beta (T - T_\infty) g_y - k \frac{\partial N}{\partial x} + \sigma (B_0)^2 v \\ &+ \left( \frac{\mu}{K^*} v \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

#### 4.1.3 Persamaan Momentum Angular

Persamaan momentum angular dimiliki oleh sebuah obyek karena kemampuannya yang dapat melakukan gerak rotasi. Pada peneltian ini, karena menggunakan fluida mikrokutub yang memiliki kemampuan gerak mikrorotasi yang dapat mempengaruhi aliran dari fluida dan fluida tipe ini juga terbentuk dari struktur mikro yang partikel-partikel didalamnya dapat berorientasi secara acak pada media kental, sehingga fluida ini juga memiliki momentum angular yang terbentuk dari prinsip-prinsip hukum Newton II dan momentum linier sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho \mathbf{u} \, dV = \iiint_{CV} \rho \mathbf{f} \, dV + \iint_{CS} \mathbf{t}_n \, dA \quad (4.44)$$

Selanjutnya, Persamaan (4.44) dapat diasumsikan ke dalam Persamaan Momentum Angular sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) \, dV = \iiint_{CV} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) \, dV + \iint_{CS} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}_n) \, dA \quad (4.45)$$

dengan Theorema Greens yaitu :

$$\iint_{CS} (x \times t_n) dA = \iiint_{CV} (x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dV \quad (4.46)$$

dengan

$\nabla \cdot T$  = bentuk penulisan lain dari  $div T$ .

$T_x$  = vektor  $e_{ijk} T_{jk}$ .

Dengan demikian, sehingga diperoleh :

$$\iiint_{CV} x \times \left( \rho \frac{Du}{Dt} - \rho f - \nabla \cdot T \right) dV = \iiint_{CV} T_x dV$$

Pada fluida mikrokutub, diberikan *body torque* per satuan massa  $g$  yang diberikan pernyataan ke *body forces*  $f$ , dan *couple stress*  $c_n$  juga disertakan ke *normal stress*  $t_n$ . Terdapat dua hal yang dipertimbangkan pada momentum angular, yaitu momentum linier  $\rho x \times u$  yang disebut sebagai momentum angular eksternal dan  $\rho l$  sebagai momentum angular internal. Selanjutnya, keseimbangan momentum angular menurut definisi sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho (l + x \times \mathbf{u}) dV = \iiint_{CV} \rho (g + x \times f) dV + \iint_{CS} (c_n + x \times t_n) dA \quad (4.47)$$

Dalam hal ini,  $t_n$  dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk  $\mathbf{n} \cdot T$  dan juga  $c_n$  dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk  $\mathbf{n} \cdot C$ , dengan  $C$  adalah *couple stress tensor* sehingga Persamaan (4.47) dapat dituliskan menjadi :

$$\rho \frac{D}{Dt} (l + x \times \mathbf{u}) = \rho g + \rho x \times f + \nabla \cdot (x \times T + C) \quad (4.48)$$

Dengan mengasumsikan bahwa momentum angular internal dapat dituliskan menjadi notasi vektor komponen  $l_i = (i = 1, 2, 3)$  dan  $l_i = I_{ik} \omega_k$ . Dalam hal ini,  $I$  adalah koefisien mikro inersia dan fluida yang merupakan fluida mikrokutub yang isotropik serta  $I_{ik} = I \delta_{ik}$ , maka persamaan dapat dilakukan reduksi menjadi :

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.49)$$

Berdasarkan Teorema pengangkutan Reynolds maka

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho I \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \omega) \right) \quad (4.50)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.50) ke Persamaan (4.49) maka diperoleh sebagai berikut :

$$\rho I \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \omega) \right) = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.51)$$



Fluida mikrokutub didefinisikan sebagai fluida isotropik dengan *couple stress tensor*  $\mathbf{C}$  dan  $\mathbf{T}_x$

$$C_{ij} = \alpha \omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta \omega_{i,j} + \gamma \omega_{j,i} \quad (4.52)$$

$$\tilde{T}_x = e_{ijk} T_{jk} = 2k e_{ikm} \mathbf{u}_{m,k} - 2k \omega_i \quad (4.53)$$

Dalam hal ini, Persamaan (4.52) dan (4.53) dapat dinyatakan kedalam notasi vektor Gibbsi sebagai berikut :

$$\nabla C = \gamma \nabla \times (\nabla \times \omega)$$

dan

$$T_x = k \nabla \times \mathbf{u} - 2k \omega$$

dengan melakukan substitusi tensor  $C$  dan  $T_x$  dan juga  $\omega = N$ , sehingga diperoleh :

$$\rho I \left( \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot N) \right) = \gamma \nabla \times (\nabla \times N) + k(-2N + \nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.54)$$

dengan :

$N$  = Daerah mikrorotasi  $(0, 0, N)$

$k$  = Kekentalan (viskositas) vortex

$I$  = Densitas mikro inersia

$\gamma$  = Gradien kekentalan (viskositas)

Selanjutnya, Persamaan (4.54) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \rho I \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} + w \frac{\partial N}{\partial z} \right) &= \gamma \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial xz} - \frac{\partial^2 N}{\partial yz} \right) \\ &- k \left( 2N + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan pada bola berpori, sehingga perubahan kecepatan dan perubahan kecepatan mikrorotasi pada arah sumbu-z sangat kecil sehingga diasumsikan nol. Oleh karena itu, dapat diperoleh persamaan Momentum Angular sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho I \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \gamma \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- k \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Persamaan (4.56) merupakan persamaan momentum angular dari aliran fluida magnetohidrodinamik mikrokutub yang melalui bola berpori dipengaruhi oleh konveksi campuran dan medan magnet.

Pada penelitian ini digunakan kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{aligned} t &= 0 ; u = v = N, \text{ untuk setiap } x, y \\ t &> 0 ; u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y} \text{ pada } y = 0 \\ u &= u_e(x); N = 0 \text{ pada } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.57)$$

## 4.2 Persamaan Energi

Berdasarkan Hukum Termodinamika I, Suatu sistem yang jumlah fluidanya tetap, berubah dari suatu keadaan ke keadaan lainnya, selanjutnya energi berubah disebabkan oleh perubahan energi yang berupa panas atau usaha (Potter, *dkk.*, 2011). Dalam hal ini, secara umum dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad (4.58)$$

Persamaan (4.58) dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho e \, dV + \iint_{CS} \rho \mathbf{e} \mathbf{u} \cdot \bar{n} dA = \dot{Q} - \dot{W} \quad (4.59)$$

selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Gauss Green, Persamaan (4.59) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned} \iiint_{CV} \rho \frac{de}{dt} \, dV + \iiint_{CV} \rho \nabla \cdot e \mathbf{u} \, dV &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \rho \left[ \iiint_{CV} \left( \frac{de}{dt} + \nabla \cdot e \mathbf{u} \right) dV \right] &= \dot{Q} - \dot{W} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dalam hal ini,  $\nabla \cdot e \mathbf{u} = e \cdot \nabla \mathbf{u} + e \nabla \cdot \mathbf{u}$ , karena  $e \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  maka  $\nabla \cdot e \mathbf{u} = e \cdot \nabla \mathbf{u}$ , sehingga Persamaan (4.60) menjadi :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \iiint_{CV} \left( \frac{de}{dt} + e \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dV \right] &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \rho \left[ \iiint_{CV} \frac{De}{dt} dV \right] &= \dot{Q} - \dot{W} \\ \iiint_{CV} \rho \frac{De}{dt} dV &= \dot{Q} - \dot{W} \end{aligned}$$

selanjutnya, laju perubahan energi dari elemen fluida per unit volume dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\rho \frac{De}{Dt} \quad (4.61)$$

dengan  $e$  adalah energi spesifik.

Entalpi untuk sebarang substansi didefinisikan sebagai berikut : (Versteeg dan Malalasekera, 2007)

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

Persamaan energi sering ditulis menjadi entalpi sehingga dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \left[ \frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) \right] \\ &= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Dalam hal ini, karena tekanan dianggap konstan maka  $\frac{Dp}{Dt} = 0$  dan karena *incompressible* maka  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , Oleh karena itu Persamaan (4.62) dapat dituliskan menjadi sebagai berikut:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} \quad (4.63)$$

karena  $W = PV$  yaitu usaha sebagai perkalian tekanan dengan volume dan tekanannya konstan, maka persamaan (4.58) dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (E_2 - E_1) + P(V_2 - V_1) &= \Delta Q \\ (E_2 + pV_2) - (E_1 + pV_1) &= mC_p\Delta T \end{aligned}$$

Selanjutnya, reaksi panas adalah  $H = E + pV$ , maka

$$\begin{aligned} \Delta H &= mC_p\Delta T \\ \frac{\Delta H}{m} &= C_p\Delta T \\ \Delta h &= C_p\Delta T \end{aligned}$$

dengan

$h$  adalah entalpi.

$C_p$  adalah panas spesifik.

$T$  adalah suhu.

Dengan demikian, Persamaan (4.63) dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

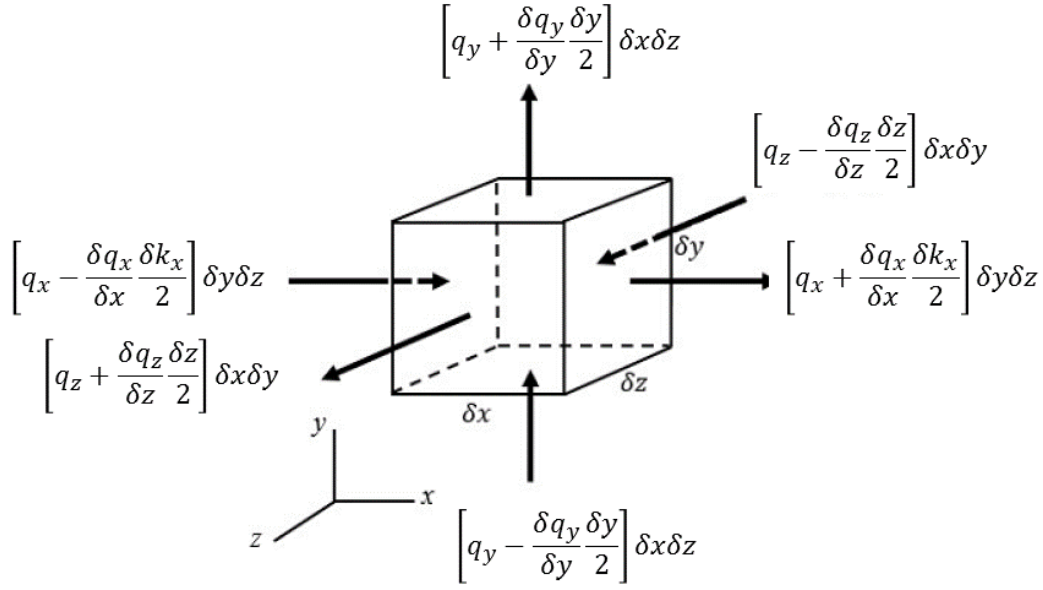
$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} \\ &= \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dalam hal ini, Laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem terdiri dari konduksi panas dan sumber panas . Pada penelitian ini tidak terdapat sumber panas pada volume kendali. Selanjutnya, akan diturunkan konduksi panas yang terjadi pada volume kendali. Dengan memisalkan  $q$  adalah notasi untuk *heat flux* yang terjadi pada volume kendali maka komponen *heat flux* dapat digambarkan sebagai berikut :

Sesuai pada Gambar 4.3, laju netto dari penerusan panas suatu partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah sumbu- $x$ , arah sumbu- $y$  dan arah sumbu- $z$  sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut :

1. Pada arah sumbu- $x$  :

$$\left[ qx - \frac{\partial(q_x)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ qx + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial(q_x)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.65)$$



Gambar 4.5: Komponen *Heat Flux* pada Volume Kendali

2. Pada arah sumbu-y :

$$\left[ q_y - \frac{\partial(q_y)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ q_y + \frac{\partial(q_y)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z = -\frac{\partial(q_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.66)$$

3. Pada arah sumbu-z :

$$\left[ q_z - \frac{\partial(q_z)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ q_z + \frac{\partial(q_z)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y = -\frac{\partial(q_z)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.67)$$

Berdasarkan Persamaan (4.65), (4.66), dan (4.67) maka total laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem adalah

$$\left( -\frac{\partial(q_x)}{\partial x} - \frac{\partial(q_y)}{\partial y} - \frac{\partial(q_z)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.68)$$

Hukum Fourier untuk konduksi panas menghubungkan konduktivitas panas  $c$  dengan gradien temperatur lokal sehingga

$$\begin{aligned} q_x &= -c \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -c \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -c \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$q = -c \nabla T \quad (4.69)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.69) ke Persamaan (4.68) maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$(-\nabla \cdot \mathbf{q}) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (c \nabla T) \delta x \delta y \delta z \quad (4.70)$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$-\nabla q = -\nabla \cdot (-c \nabla T) = c \nabla^2 T \quad (4.71)$$

Dalam hal ini, dikarenakan perubahan entalpi yang disebabkan oleh energi kinetik cukup kecil, maka laju usaha yang bekerja pada fluida adalah nol. Dari persamaan (4.64) dan (4.71), maka persamaan energi dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = c \nabla^2 T \quad (4.72)$$

atau dapat dituliskan menjadi :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.73)$$

Pada penelitian ini yang diamati adalah permukaan pada bola berpori, sehingga perubahan temperatur pada arah sumbu-z sangat kecil sehingga diasumsikan nol. Oleh karena itu, dapat diperoleh persamaan Energi sebagai berikut :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.74)$$

### 4.3 Penurunan Persamaan Pembangun

Pada penelitian ini, aliran fluida yang bersifat *unsteady* yaitu kecepatan aliran fluida dipengaruhi oleh perubahan waktu dan *incompressible* (tak mampu mampat) dapat dibentuk persamaan pembangun sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

atau dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{\partial \bar{r} \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r} \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.75)$$

2. Persamaan Momentum

- (a) Persamaan momentum linier sumbu-x :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_x + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} + \sigma (B_0)^2 \bar{u} \\ &+ \frac{\mu}{K^*} \bar{u} \end{aligned} \quad (4.76)$$

(b) Persamaan momentum linier sumbu- $y$  :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \sigma (B_0)^2 \bar{v} \\ &+ \left( \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

3. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \rho I \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) &= \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &- k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

4. Persamaan Energi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.79)$$

#### 4.4 Transformasi Variabel Tak-berdimensi

Pada penelitian ini, Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh diubah ke dalam persamaan tak berdimensi dengan melakukan transformasi variabel tak berdimensi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan sebagai berikut (Mohammad, 2014) dan (Ali, 2010):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, \quad r = \frac{\bar{r}}{a}, \quad b = \frac{\bar{b}}{a}, \quad u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \quad v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\ t &= \frac{U_\infty \bar{t}}{a}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, \quad T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_W - T_\infty}, \quad r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, \quad N = Re^{-1/2} \frac{a \bar{N}}{U_\infty} \\ g_x &= -g \sin x, \quad g_y = g \cos x \end{aligned}$$

Dalam hal ini,  $Re$  adalah bilangan Reynolds dan  $v$  adalah viskositas kinematis yang merupakan perbandingan antara viskositas dinamis dengan densitas dengan  $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$  dan  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Selanjutnya, dengan melakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi tersebut ke dalam persamaan pembangun yang telah didapatkan pada subbab 4.1 dan dengan mendefinisikan :

$$M = \frac{a \sigma (B_0)^2}{\rho U_\infty} \quad \text{dan} \quad K = \frac{k}{\mu}$$

Oleh karena itu, dapat diperoleh Persamaan sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial y} = 0 \quad (4.80)$$

2. Persamaan Momentum sumbu- $x$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha T \sin x \quad (4.81) \\ &+ (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \Phi) u \end{aligned}$$

Persamaan Momentum sumbu- $y$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1+K)}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\alpha T}{Re^{1/2}} \cos x \quad (4.82) \\ &+ \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial y} - \left( \frac{M + \Phi}{Re} \right) v \end{aligned}$$

3. Persamaan momentum angular :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.83) \end{aligned}$$

4. Persamaan Energi:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.84)$$

dengan  $M$ ,  $\alpha$ ,  $Gr$ ,  $Pr$ , dan  $K$  adalah parameter tak berdimensi. Parameter-parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$M = \frac{\alpha \sigma (B_0)^2}{\rho U_\infty}$  adalah Parameter Magnetik.

$\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$  adalah Parameter Konveksi.

$Gr = \frac{g \beta (T_W - T_\infty) a^3}{\nu^2}$  adalah Parameter Grashof.

$Pr = \frac{\nu \rho C_p}{c}$  adalah Bilangan Prandtl.

$K = \frac{k}{\mu}$  adalah Parameter micropolar.

$\Phi = \frac{\mu a \mu}{\rho U_\infty K^*}$  adalah Parameter Porositas.

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, maka kondisi awal dan kondisi batas diberikan :

$$\begin{aligned} t &= 0 ; u = v = N = T = 0, \text{ untuk setiap } x, y \\ t &> 0 ; u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y}, T = 1 \text{ pada } y = 0 \quad (4.85) \\ u &= u_e(x); N = 0, T = 0, \text{ pada } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

#### 4.5 Pendekatan Menggunakan Teori Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas digunakan karena lapisan batas yang terbentuk adalah sebuah lapisan yang sangat tipis yang mana bilangan Reynoldsnnya mendekati tak hingga ( $Re \rightarrow \infty$ ) sehingga  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ . Oleh karena itu, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (4.86)$$

2. Persamaan Momentum Sumbu- $x$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha T \sin x \\ &- (M + \Phi)u + K \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Persamaan Momentum Sumbu- $y$ :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.88)$$

3. Persamaan Momentum Angular :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

4. Persamaan Energi:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.90)$$

Pada persamaan momentum sumbu- $x$ , tekanan tidak memberikan pengaruh pada kecepatan searah sumbu- $x$ . Dengan demikian, hanya ada persamaan satu momentum yang tersisa di sistem, yaitu persamaan momentum sumbu- $x$ . Selanjutnya, Persamaan momentum untuk aliran bebas pada fluida yang mengalir melalui bola berpori bermagnet adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + \alpha T \sin x \\ &- (M + \Phi)u_e + K \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.91)$$



dengan menggunakan kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2} \sin x$ , maka dapat diperoleh :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_e}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u_e}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{4.92}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.92) ke Persamaan (4.91) maka dapat diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \alpha T u_e - (M + \Phi) u_e\tag{4.93}$$

dan saat  $T = 0$  maka Persamaan (4.93) dapat berubah menjadi :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (M + \Phi) u_e\tag{4.94}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4.94) ke Persamaan (4.87) sehingga dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \alpha T u_e \\ &- (M + \Phi)(u - u_e) + K \frac{\partial N}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.95}$$

#### 4.6 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Pada penelitian ini menggunakan penampang dua dimensi yaitu  $u$  dan  $v$  yang alirannya berada pada bidang  $x$  dan  $y$ . Agar dua fungsi kecepatan tersebut saling terhubung maka dikenalkan sebuah fungsi arus atau fungsi alir. Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi dalam bentuk satu variabel. Fungsi alir didefinisikan sebagai berikut :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}\tag{4.96}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.96) ke masing-masing Persamaan (4.86), (4.89), (4.90), dan (4.95) sehingga diperoleh sebagai berikut :

1. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\tag{4.97}$$

2. Persamaan Momentum Linear:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{2}{3} \alpha T u_e - (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \\
& + K \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.98}$$

3. Persamaan Momentum Angular :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) & = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
& - K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{4.99}$$

4. Persamaan Energi:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.100}$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
t &= 0 ; \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N = T = 0, \text{ untuk setiap } x, y \\
t &> 0 ; \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, N = -n \frac{\partial \Psi}{\partial y}, T = 1, \text{ pada } y = 0 \\
\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= u_e(x), T = 0, N = 0, \text{ pada } y \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

#### 4.7 Persamaan Similaritas

Dalam hal ini, Persamaan similaritas adalah hasil perubahan persamaan pada fungsi alir ke dalam variabel-variabel similaritas. Persamaan momentum linier, persamaan momentum angular, dan persamaan energi yang pada fungsi alir ditransformasikan kedalam variabel similaritas yang terdiri dari 2 tipe waktu yaitu untuk waktu kecil (*Small Time*) dan waktu besar (*Large Time*).

Persamaan dengan variabel similaritas untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai, yaitu

$$\Psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \tag{4.101}$$

dengan

$$T = s(x, \eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}, \quad N = t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

Dengan penerapan Persamaan (4.101) pada masing-masing Persamaan (4.98), Persamaan (4.99) dan Persamaan (4.100) maka dapat diperoleh :

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
(1+K)\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} &+ \frac{\eta \partial^2 f}{2\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&+ (M + \Phi)t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \frac{2}{3} \alpha s t \\
&+ t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.102)
\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} &+ \frac{\eta \partial h}{2\partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} \\
&+ t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
&+ t K \left( 2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.103)
\end{aligned}$$

3. Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} &+ \frac{Pr\eta \partial s}{2\partial \eta} + Prt \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
&= Prt \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.104)
\end{aligned}$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
t &= 0 ; f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta \\
t &> 0 ; f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \eta} &= 1, h = s = 0, \text{ pada } \eta \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan dengan variabel similaritas untuk *large time* ( $t > t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai, yaitu

$$\Psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t) \quad (4.105)$$

dengan

$$T = S(x, Y, t), \quad Y = y, \quad N = u_e(x)H(x, Y, t)$$

dengan penerapan Persamaan (4.105) pada masing-masing Persamaan (4.98), (4.99), dan (4.100) maka dapat diperoleh sebagai berikut :

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
(1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} &+ \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} \\
&+ (M + \Phi) \left( \frac{\partial F}{\partial Y} - 1 \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + \frac{2}{3} \alpha St \\
&+ u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.106)
\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} &+ \frac{du_e}{dx} \left( F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} \\
&+ u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial H}{\partial Y} \right) \\
&+ K \left( 2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.107)
\end{aligned}$$

3. Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} &+ Pr \frac{du_e}{dx} F \frac{\partial S}{\partial Y} \\
&= Pr \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dS}{dx} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right] \quad (4.108)
\end{aligned}$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, \quad H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, \quad S = 1, \quad \text{pada } Y = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial Y} &= 1, \quad H = S = 0, \quad \text{pada } Y \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Pada penelitian ini difokuskan pada bagian titik stagnasi ( $x = 0$ ). Dengan demikian, nilai  $u_e(x) = 0$  dan  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ . Sehingga Persamaan Momentum Linear (4.102), Persamaan Momentum Angular (4.103) dan Persamaan Energi (4.104) untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) masing-masing adalah

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
(1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} &+ \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (4.109) \\
&+ (M + \Phi) t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \frac{2}{3} \alpha st
\end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta \partial h}{2 \partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{3}{2} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) &= t \frac{\partial h}{\partial t} \\ + t K \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) & \end{aligned} \quad (4.110)$$

3. Persamaan Energi

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr \eta \partial s}{2 \partial \eta} + \frac{3}{2} Pr t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = Pr t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.111)$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} t &= 0 ; f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = s = 0, \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t &> 0 ; f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 1, h = s = 0, \text{ pada } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Selanjutnya, Persamaan Momentum Linear (4.106), Persamaan Momentum Angular (4.107) dan Persamaan Energi (4.108) untuk *large time* ( $t > t^*$ ) menjadi

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} (1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + (M + \Phi) \left( \frac{\partial F}{\partial Y} - 1 \right) + K \frac{\partial H}{\partial Y} \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} - \frac{2}{3} \alpha S \end{aligned} \quad (4.112)$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \left(F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y}\right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left(2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right) \quad (4.113)$$

3. Persamaan Energi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} Pr F \frac{\partial S}{\partial Y} = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.114)$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0 ; S = 1, \text{ untuk } Y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= 1 ; H = 0, S = 0, \text{ untuk } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pada penelitian ini menggunakan konveksi campuran sehingga nilai parameter konveksi ( $\alpha \neq 0$ ), maka Persamaan Momentum Linear, Persamaan Momentum Angular dan Persamaan Energi untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) dan *large time* ( $t > t^*$ ) tetap, seperti Persamaan- Persamaan sebelumnya. Hal tersebut, berpengaruh pada saat simulasi.

Selanjutnya, untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) dengan memisalkan

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f' , \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = s' , \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = h'$$

maka Persamaan Momentum Linear, Persamaan Momentum Angular dan Persamaan Energi pada Persamaan (4.109), Persamaan (4.110), dan Persamaan (4.111) adalah sebagai berikut :

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} (1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] + Kh' & \quad (4.115) \\ + (M + \Phi)t(f' - 1) = t\frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{2}{3}\alpha st & \end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fh' - hf'') = t\frac{\partial h}{\partial t} \\ + tK(2h + f'') & \quad (4.116) \end{aligned}$$

3. Persamaan Energi

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' + \frac{3}{2}Prtf s' = Prt\frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.117)$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} t = 0 ; f = f' = h = s = 0 ; \text{ untuk setiap } x, \eta & \quad (4.118) \\ t > 0 ; f = f' = 0 ; h = -nf'' ; s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ f' = 1 ; s = 0 ; h = 0 ; \text{ pada } \eta \rightarrow \infty & \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk *large time* ( $t > t^*$ ) dengan memisalkan

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = F' , \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = S' , \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = H'$$

maka Persamaan Momentum Linear, Persamaan Momentum Angular dan Persamaan Energi pada Persamaan (4.112), Persamaan (4.113), dan Persamaan (4.114) adalah sebagai berikut :

1. Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} (1 + K)F''' + \frac{3}{2}[1 - (F')^2 + FF''] + (M + \Phi)(F' - 1) + KH' \\ = \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{2}{3}\alpha S & \quad (4.119) \end{aligned}$$

2. Persamaan Momentum Angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) H'' + \frac{3}{2}(FH' - HF') = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + F'') \quad (4.120)$$

3. Persamaan Energi

$$S'' + \frac{3}{2}PrFS' = Pr\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.121)$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} F &= F' = 0, \quad H = -nF''; \quad S = 1, \quad \text{untuk } Y = 0 \\ F' &= 1; \quad H = 0, \quad S = 0, \quad \text{untuk } Y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.122)$$

Dengan mensubstitusikan  $t = 0$  ke dalam persamaan (4.115), (4.116) dan persamaan (4.117), kemudian diintegrasikan dengan menggunakan kondisi batas pada persamaan (5.65), maka dapat diperoleh kondisi awal untuk fungsi  $f, f', f'', s, s', h, h'$  sebagai berikut :

1. Kondisi Awal Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}}(e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1) \\ f' &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{(1+K(1-n))}}\right) \\ f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}}e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \end{aligned}$$

2. Kondisi Awal Persamaan Momentum Angular, dengan  $h = -nf''$  sebagai kondisi batas.

$$\begin{aligned} h &= -\frac{n}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}}e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \\ h' &= \frac{n\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}}e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \end{aligned}$$

3. Kondisi Awal Persamaan Energi

$$\begin{aligned} s &= -\operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + 1 \\ s' &= -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}}e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \end{aligned}$$





## BAB 5

### PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada Bab ini membahas penyelesaian dan simulasi numerik dari model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub yang dipengaruhi oleh medan magnet dan konveksi campuran yang telah diperoleh pada Bab IV. Penyelesaian yang digunakan untuk model matematika yang diperoleh adalah dengan menggunakan metode Keller-Box. Langkah pertama yaitu memisalkan persamaan berorde tinggi menjadi persamaan orde pertama, langkah kedua yaitu dilakukan diskritisasi, langkah ketiga yaitu linearisasi dengan metode Newton, dan langkah terakhir yaitu menyelesaikan hasil linearisasi dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

#### 5.1 Penyelarasan Notasi

Pada langkah pertama, dilakukan proses merubah persamaan-persamaan orde tinggi pada persamaan (4.115), (4.116), (4.117), (4.119), (4.120), dan (4.121) menjadi persamaan-persamaan orde pertama dan melakukan permisalan fungsi sebagai berikut :

1. *Small Time* dengan memisalkan :

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$s' = q \quad (5.3)$$

$$h' = z \quad (5.4)$$

maka Persamaan Momentum Linear (4.115), Persamaan Momentum Angular (4.116) dan Persamaan Energi (4.117) masing-masing adalah

- (a) Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} (1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t [1 - (u)^2 + fv] + Kz \\ + (M + \Phi)t(u - 1) = t \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2}{3}\alpha st \end{aligned} \quad (5.5)$$

- (b) Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{K}{2}\right)z' + \frac{\eta}{2}z + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fz - hu) = t \frac{\partial h}{\partial t} \\ + tK(2h + v) \end{aligned} \quad (5.6)$$

(c) Persamaan Energi

$$q' + \frac{Pr\eta}{2}q + \frac{3}{2}Prtfq = Prt\frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.7)$$

## 2. Large Time

dengan memisalkan :

$$F' = U \quad (5.8)$$

$$U' = V \quad (5.9)$$

$$S' = Q \quad (5.10)$$

$$H' = Z \quad (5.11)$$

maka Persamaan Momentum Linear (4.119), Persamaan Momentum Angular (4.120) dan Persamaan Energi (4.121) masing-masing adalah

(a) Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned} (1 + K)V' + \frac{3}{2} [1 - (U)^2 + FV] &+ (M + \Phi)(U - 1) + KZ \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{2}{3}\alpha St \end{aligned} \quad (5.12)$$

(b) Persamaan Momentum Angular

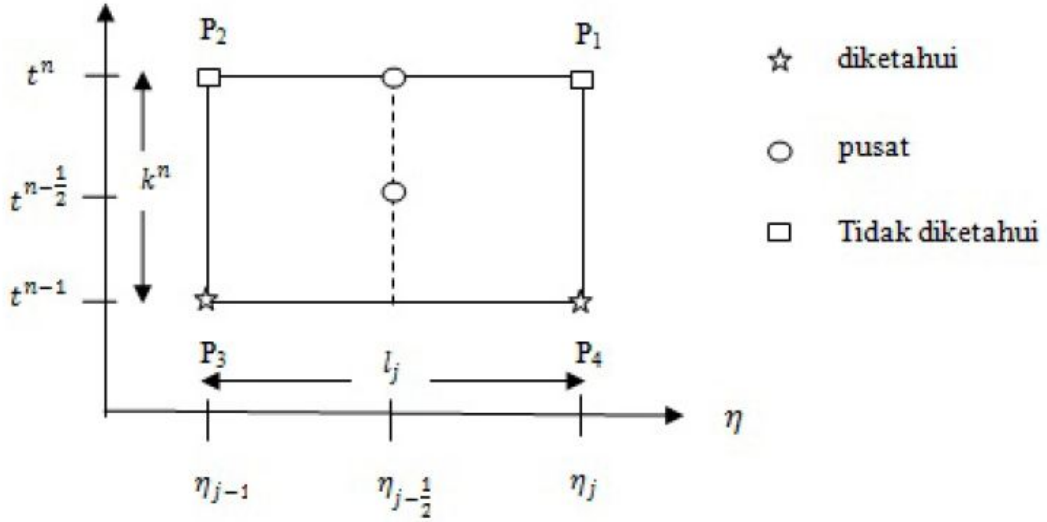
$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) Z' + \frac{3}{2} (FZ - HU) = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + V) \quad (5.13)$$

(c) Persamaan Energi

$$Q' + \frac{3}{2}PrFQ = Pr\frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.14)$$

## 5.2 Diskritisasi Model

Setelah dilakukan pemisalan fungsi, Selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar 5.1. Selanjutnya, proses diskritisasi pada model matematika diperoleh pada waktu kecil (*Small Time*) dan pada waktu besar (*Large Time*). Pada Persamaan (5.1) - (5.4) dan Persamaan (5.8) - (5.11) menggunakan titik pusat atau titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1P_2$  dengan beda hingga pusat. Sedangkan untuk persamaan-persamaan yang tak linier seperti Persamaan (5.5) - (5.7) dan Persamaan (5.12) (5.14) digunakan titik pusat atau titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segi empat  $P_1P_2P_3P_4$ .



Gambar 5.1: Skema Beda Hingga Keller-box

1. *Small Time*

Hasil diskritisasi Persamaan (5.1)-(5.4) menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1P_2$  dan Persamaan (5.5), (5.6), dan (5.7) dengan menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segiempat  $P_1P_2P_3P_4$  adalah

$$\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.15)$$

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.16)$$

$$\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.17)$$

$$\frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{l_j} = z_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.18)$$

(a) Persamaan Momentum Linear

$$(1 + K) \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K(z_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{3}{2} t^n \left[ 1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right] - (M + \Phi) t^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ & - \frac{2}{3} \alpha s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + K) \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \\ & - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - K(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{3}{2} t^{n-1} \left[ 1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] \\ & + (M + \Phi) t^{n-1} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{2}{3} \alpha s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

(b) Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(z_j^n - z_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(z_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.20) \\
& + \frac{3}{2}t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n z_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - t^n K(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{(z_j^{n-1} - z_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& - \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2}t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \\
& + t^{n-1} K(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

(c) Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j}\right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.21) \\
& - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(\frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j}\right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - \frac{3}{2} Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

## 2. Large Time

Hasil diskritisasi Persamaan (5.8)-(5.11) menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1P_2$  dan Persamaan (5.12), (5.13), dan (5.14) dengan menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segiempat  $P_1P_2P_3P_4$  adalah

$$\frac{F_j^n - F_{j-1}^n}{l_j} = U_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.22)$$

$$\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{l_j} = V_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.23)$$

$$\frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{l_j} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.24)$$

$$\frac{H_j^n - H_{j-1}^n}{l_j} = Z_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.25)$$

(a) Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left( \frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} \right) + K Z_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.26) \\
& + \frac{3}{2} \left[ 1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right] \\
& - (M + \Phi) (1 - F_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& = -(1 + K) \left( \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) - K Z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - \frac{3}{2} \left[ 1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] + (M + \Phi) (1 - F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

(b) Persamaan Momentum Angular

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{(Z_j^n - Z_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{3}{2} \left[ F_{j-\frac{1}{2}}^n Z_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (5.27) \\
& + K \left( 2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& = - \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{(Z_j^{n-1} - Z_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) - \frac{3}{2} \left[ F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] \\
& - K \left( 2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

(c) Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} \right) + \frac{3}{2} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.28) \\
& - \left( \frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) - \frac{3}{2} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

dengan  $l_j$  adalah step size untuk  $\eta$ , sedangkan  $k^n$  adalah step size dari waktu.

### 5.3 Pelinieran Model

Pada langkah ketiga, setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linearisasi model pada Persamaan (5.15)-(5.28) dengan menggunakan metode Newton (Mohammad, 2014). Sebelum melakukan proses

pelinieran, diperkenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_j^{i+1} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
u_j^{i+1} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
v_j^{i+1} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\
h_j^{i+1} &= h_j^{(i)} + \delta h_j^{(i)} \\
s_j^{i+1} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
q_j^{i+1} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan bentuk iterasi (5.29) pada sistem Persamaan (5.15)-(5.28), sehingga diperoleh Persamaan-persamaan sebagai berikut :

1. *Small Time*

Persamaan (5.15)-(5.18) hasil linearisasinya adalah sebagai berikut :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{5.30}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n) \tag{5.31}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \tag{5.32}$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta z_j - \delta z_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(z_j^n - z_{j-1}^n) \tag{5.33}$$

dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (5.30)-(5.33) yaitu :

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

$$(r_4)_j = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(z_j^n - z_{j-1}^n)$$

Sehingga bentuk Persamaan (5.30)-(5.33) menjadi :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \tag{5.34}$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \tag{5.35}$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \tag{5.36}$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta z_j - \delta z_{j-1}) = (r_4)_j \tag{5.37}$$

Selanjutnya dilakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari Persamaan (5.19), (5.20) dan (5.21) sehingga dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(r_5)_j = & -(1+K) \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} (v_{j-1/2}^n) - K(z_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{3}{2} t^n [1 - (u_{j-1/2}^n)^2 + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n] + (M + \Phi) t^n (1 - u_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{2}{3} \alpha s_{j-1/2}^n t^n + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
(r_6)_j = & - \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} z_{j-1/2}^n - \frac{1}{2} h_{j-1/2}^n - \\
& \frac{3}{2} t^n [f_{j-1/2}^n z_{j-1/2}^n - h_{j-1/2}^n u_{j-1/2}^n] + t^n K (2h_{j-1/2}^n + v_{j-1/2}^n) + \\
& 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} h_{j-1/2}^n
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
(r_7)_j = & - \left( \frac{q_j^n + q_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^n - \frac{3}{2} Pr t^n (f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n) \\
& + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n
\end{aligned} \tag{5.40}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-1/2}^n \\
a_2 &= -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-1/2}^n \\
a_3 &= \frac{3}{4} t^n v_{j-1/2}^n \\
a_4 &= (a_3)_j \\
a_5 &= -\frac{3}{2} t^n u_{j-1/2}^n - \frac{(M+\Phi)}{2} t^n - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
a_6 &= -\frac{3}{2} t^n u_{j-1/2}^n - \frac{(M+\Phi)}{2} t^n - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
a_7 &= \frac{1}{2} K \\
a_8 &= (a_7)_j \\
a_9 &= \frac{2}{6} \alpha t^n s_{j-1/2}^n \\
a_{10} &= (a_9)_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{(1 + K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} + \frac{3}{2}t^n f_{j-1/2}^n \\
b_2 &= -\frac{(1 + K/2)}{l_j} + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} + \frac{3}{2}t^n f_{j-1/2}^n \\
b_3 &= \frac{3}{4}t^n z_{j-1/2}^n \\
b_4 &= (b_3)_j \\
b_5 &= -\frac{3}{4}t^n h_{j-1/2}^n \\
b_6 &= (b_5)_j \\
b_7 &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}t^n u_{j-1/2}^n - t^n K - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
b_8 &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}t^n u_{j-1/2}^n - t^n K - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\
b_9 &= -\frac{1}{2}t^n K \\
b_{10} &= (b_9)_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{l_j} + \frac{Pr}{4}\eta_{j-1/2} + \frac{3}{4}Pr t^n f_{j-1/2}^n \\
c_2 &= -\frac{1}{l_j} + \frac{Pr}{4}\eta_{j-1/2} + \frac{3}{4}Pr t^n f_{j-1/2}^n \\
c_3 &= \frac{3}{4}Pr t^n q_{j-1/2}^n \\
c_4 &= (a_3)_j \\
c_5 &= -\frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \\
c_6 &= (c_5)_j
\end{aligned}$$

Selanjutnya, mensubstitusikan  $(a_1) - (c_6)$  ke Persamaan (5.38)-(5.40) sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j + (a_6)_j \delta u_{j-1} + \\
&(a_7)_j \delta z_j + (a_8)_j \delta z_{j-1} + (a_9)_j \delta s_j + (a_{10})_j \delta s_{j-1} = (r_5)_j
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
&(b_1)_j \delta z_j + (b_2)_j \delta z_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta u_j + (b_6)_j \delta u_{j-1} + \\
&(b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} + (b_9)_j \delta v_j + (b_{10})_j \delta v_{j-1} = (r_6)_j
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
&(c_1)_j \delta q_j + (c_2)_j \delta q_{j-1} + (c_3)_j \delta f_j + \\
&(c_4)_j \delta f_{j-1} + (c_5)_j \delta s_j + (c_6)_j \delta s_{j-1} = (r_7)_j
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Berdasarkan kondisi batas maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta s_N = 0, \delta h_N = 0$

## 2. Large Time



Persamaan (5.22)-(5.25) hasil linearisasinya adalah sebagai berikut.

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (5.44)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n - V_{j-1}^n) \quad (5.45)$$

$$(\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (5.46)$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Z_j - \delta Z_{j-1}) = -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Z_j^n - Z_{j-1}^n) \quad (5.47)$$

dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (5.45)-(5.47) yaitu :

$$\begin{aligned} (r_1)_j &= -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \\ (r_2)_j &= -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n - V_{j-1}^n) \\ (r_3)_j &= -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \\ (r_4)_j &= -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Z_j^n - Z_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Sehingga bentuk Persamaan (5.45)-(5.47) menjadi :

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.48)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.49)$$

$$(\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.50)$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Z_j - \delta Z_{j-1}) = (r_4)_j \quad (5.51)$$

Selanjutnya dilakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari Persamaan (5.26), (5.27) dan (5.28) sehingga dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (r_5)_j &= -(1 + K) \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) - K(Z_{j-1/2}^n) - \\ &\frac{3}{2} [1 - (U_{j-1/2}^n)^2 + F_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^n] + (M + \Phi) (1 - U_{j-1/2}^n) + \\ &\frac{2}{3} \alpha S_{j-1/2}^n t^n + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} U_{j-1/2}^n \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$(r_6)_j = - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{Z_j^n - Z_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{3}{2} [F_{j-1/2}^n Z_{j-1/2}^n - H_{j-1/2}^n U_{j-1/2}^n] + K (2H_{j-1/2}^n + V_{j-1/2}^n) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} H_{j-1/2}^n \quad (5.53)$$

$$(r_7)_j = - \left(\frac{Q_j^n + Q_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{3}{2} Pr (F_{j-1/2}^n Q_{j-1/2}^n) + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} S_{j-1/2}^n + R_3 \quad (5.54)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4} F^n \\ a_2 &= -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{4} F_{j-1/2}^n \\ a_3 &= \frac{3}{4} V_{j-1/2}^n \\ a_4 &= (a_3)_j \\ a_5 &= \frac{3}{4} U_{j-1/2}^n + \frac{(M+\Phi)}{2} - \frac{1}{k^n} \\ a_6 &= \frac{3}{4} U_{j-1/2}^n + \frac{(M+\Phi)}{2} - \frac{1}{k^n} \\ a_7 &= \frac{1}{2} K \\ a_8 &= (a_7)_j \\ a_9 &= \frac{2}{6} \alpha \\ a_{10} &= (a_9)_j \\ b_1 &= \frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{3}{2} F_{j-1/2}^n \\ b_2 &= -\frac{(1+K/2)}{l_j} + \frac{3}{2} F_{j-1/2}^n \\ b_3 &= \frac{3}{2} Z_{j-1/2}^n \\ b_4 &= (b_3)_j \\ b_5 &= -\frac{3}{4} H_{j-1/2}^n \\ b_6 &= (b_5)_j \\ b_7 &= -\frac{3}{4} U_{j-1/2}^n - K - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\ b_8 &= -\frac{3}{4} U_{j-1/2}^n + K - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \\ b_9 &= -\frac{1}{2} K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{10} &= (b_9)_j \\
c_1 &= \frac{1}{l_j} + \frac{3}{4}PrF_{j-1/2}^n \\
c_2 &= -\frac{1}{l_j} + \frac{3}{4}PrF_{j-1/2}^n \\
c_3 &= \frac{3}{4}PrQ_{j-1/2}^n \\
c_4 &= (a_3)_j \\
c_5 &= -\frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \\
c_6 &= (c_5)_j
\end{aligned}$$

Selanjutnya, mensubstitusikan  $(a_1) - (c_6)$  ke Persamaan (5.52)-(5.54) sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(a_1)_j \delta V_j + (a_2)_j \delta V_{j-1} + (a_3)_j \delta F_j + (a_4)_j \delta F_{j-1} + (a_5)_j \delta U_j + (a_6)_j \delta U_{j-1} + \\
&(a_7)_j \delta Z_j + (a_8)_j \delta Z_{j-1} + (a_9)_j \delta S_j + (a_{10})_j \delta S_{j-1} = (r_5)_j
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
&(b_1)_j \delta Z_j + (b_2)_j \delta Z_{j-1} + (b_3)_j \delta F_j + (b_4)_j \delta F_{j-1} + (b_5)_j \delta U_j + (b_6)_j \delta U_{j-1} + \\
&(b_7)_j \delta H_j + (b_8)_j \delta H_{j-1} + (b_9)_j \delta V_j + (b_{10})_j \delta V_{j-1} = (r_6)_j
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
&(c_1)_j \delta Q_j + (c_2)_j \delta Q_{j-1} + (c_3)_j \delta F_j + \\
&(c_4)_j \delta F_{j-1} + (c_5)_j \delta S_j + (c_6)_j \delta S_{j-1} = (r_7)_j
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Berdasarkan kondisi batas maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta F_0 = 0, \delta U_0 = 0, \delta S_0 = 0, \delta H_0 = 0, \delta U_N = 0, \delta S_N = 0, \delta H_N = 0$

#### 5.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Pada langkah keempat, hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal (Mohammad, 2014). Persamaan-persamaan dari hasil linierisasi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok tridiagonal yang berupa matriks blok. Hal ini yang merupakan ciri dari penyelesaian metode Keller-Box karena pada penyelesaian dengan matriks tridiagonal biasanya elemen-elemen berisi konstanta-konstanta. Hasil dari proses linierisasi tersebut dapat dibentuk matriks blok tridiagonal dengan cara cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat  $j = 1, j = N - 1$ , dan  $j = N$  sebagai berikut :

1. Saat  $j = 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2}(\delta u_1 - \delta u_0) &= (r_1)_1 \\
(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2}(\delta v_1 - \delta v_0) &= (r_2)_1 \\
(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_j}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) &= (r_3)_1 \\
(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_j}{2}(\delta z_1 - \delta z_0) &= (r_4)_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_1 \delta v_1 + (a_2)_1 \delta v_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 + (a_5)_1 \delta u_1 + (a_6)_1 \delta u_0 + \\
& (a_7)_1 \delta z_1 + (a_8)_1 \delta z_0 + (a_9)_1 \delta s_1 + (a_{10})_1 \delta s_0 = (r_5)_1 \\
& (b_1)_1 \delta z_1 + (b_2)_1 \delta z_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta u_1 + (b_6)_1 \delta u_0 + \\
& (b_7)_1 \delta h_1 + (b_8)_1 \delta h_0 + (b_9)_1 \delta v_1 + (b_{10})_1 \delta v_0 = (r_6)_1 \\
& (c_1)_1 \delta q_1 + (c_2)_1 \delta q_0 + (c_3)_1 \delta f_1 + \\
& (c_4)_1 \delta f_0 + (c_5)_1 \delta s_1 + (c_6)_1 \delta s_0 = (r_7)_1
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta h_0 = 0$  dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{l_j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_j}{2} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{l_j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_j}{2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{l_j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_j}{2} \\
(a_2)_1 & 0 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & 0 & (a_7)_1 \\
(b_{10})_1 & 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & (b_9)_1 & 0 & (b_1)_1 \\
0 & (c_2)_1 & 0 & (c_3)_1 & 0 & (c_1)_1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta v_0 \\
\delta q_0 \\
\delta z_0 \\
\delta f_1 \\
\delta v_1 \\
\delta q_1 \\
\delta z_1
\end{pmatrix}
+$$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{l_j}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a_5)_1 & (a_9)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(b_5)_1 & 0 & (b_7)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (c_5)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta v_1 \\
\delta s_1 \\
\delta h_1 \\
\delta f_2 \\
\delta v_2 \\
\delta q_2 \\
\delta z_2
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
(r_1)_1 \\
(r_2)_1 \\
(r_3)_1 \\
(r_4)_1 \\
(r_5)_1 \\
(r_6)_1 \\
(r_7)_1
\end{pmatrix}$$

Selanjutnya, saat  $j = 1$  matriks di atas dapat dituliskan :

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

2. Saat  $j = N - 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) &= (r_1)_{N-1} \\
(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) &= (r_2)_{N-1} \\
(\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) &= (r_3)_{N-1} \\
(\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta z_{N-1} - \delta z_{N-2}) &= (r_4)_{N-1} \\
\\
(a_1)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta v_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + \\
(a_5)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta u_{N-2} + (a_7)_{N-1}\delta z_{N-1} + \\
(a_8)_{N-1}\delta z_{N-2} + (a_9)_{N-1}\delta s_{N-1} + (a_{10})_{N-1}\delta s_{N-2} &= (r_5)_{N-1} \\
(b_1)_{N-1}\delta z_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta z_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + \\
(b_5)_{N-1}\delta u_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta u_{N-2} + (b_7)_{N-1}\delta h_{N-1} + (b_8)_{N-1}\delta h_{N-2} + \\
(b_9)_{N-1}\delta v_{N-1} + (b_{10})_{N-1}\delta v_{N-2} &= (r_6)_{N-1} \\
(c_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (c_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (c_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + \\
(c_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (c_5)_{N-1}\delta s_{N-1} + (c_6)_{N-1}\delta s_{N-2} &= (r_7)_{N-1}
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta h_0 = 0$  dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\
0 & 0 & 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} & 0 & (a_8)_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & (b_{10})_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & (c_4)_{N-1} & 0 & (c_2)_{N-1} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta v_N \\
\delta q_N \\
\delta z_N \\
\delta f_{N-2} \\
\delta v_{N-2} \\
\delta q_{N-2} \\
\delta z_{N-2}
\end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\
(a_6)_{N-1} & (a_{10})_{N-1} & 0 & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & 0 & (a_7)_{N-1} \\
(b_6)_{N-1} & 0 & (b_8)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & (b_9)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \\
0 & (c_6)_{N-1} & 0 & (c_3)_{N-1} & 0 & (c_1)_{N-1} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta u_{N-2} \\
\delta s_{N-2} \\
\delta h_{N-2} \\
\delta f_{N-1} \\
\delta v_{N-1} \\
\delta q_{N-1} \\
\delta z_{N-1}
\end{pmatrix}
+$$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a_5)_{N-1} & (a_9)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(b_5)_{N-1} & 0 & (b_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (c_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta u_{N-1} \\
\delta s_{N-1} \\
\delta h_{N-1} \\
\delta f_N \\
\delta v_N \\
\delta q_N \\
\delta z_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
(r_1)_{N-1} \\
(r_2)_{N-1} \\
(r_3)_{N-1} \\
(r_4)_{N-1} \\
(r_5)_{N-1} \\
(r_6)_{N-1} \\
(r_7)_{N-1}
\end{pmatrix}$$

Selanjutnya, saat  $j = N$  matriks di atas dapat dituliskan :

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk setiap  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ .

3. Saat  $j = N$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_N - \delta u_{N-1}) &= (r_1)_N \\
(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_N - \delta v_{N-1}) &= (r_2)_N \\
(\delta s_N - \delta s_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) &= (r_3)_N \\
(\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta z_N - \delta z_{N-1}) &= (r_4)_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_N \delta v_N + (a_2)_N \delta v_{N-1} + (a_3)_N \delta f_N + (a_4)_N \delta f_{N-1} + \\
& (a_5)_N \delta u_N + (a_6)_N \delta u_{N-1} + (a_7)_N \delta z_N + \\
& (a_8)_N \delta z_{N-1} + (a_9)_N \delta s_N + (a_{10})_N \delta s_{N-1} = (r_5)_N \\
& (b_1)_N \delta z_N + (b_2)_N \delta z_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} + \\
& (b_5)_N \delta u_N + (b_6)_N \delta u_{N-1} + (b_7)_N \delta h_N + (b_8)_N \delta h_{N-1} + \\
& (b_9)_N \delta v_N + (b_{10})_N \delta v_{N-1} = (r_6)_N \\
& (c_1)_N \delta q_N + (c_2)_N \delta q_{N-1} + (c_3)_N \delta f_N + \\
& (c_4)_N \delta f_{N-1} + (c_5)_N \delta s_N + (c_6)_N \delta s_{N-1} = (r_7)_N
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta h_0 = 0$  dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & 0 & (a_4)_N & (a_2)_N & 0 & (a_8)_N \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_N & (b_{10})_N & 0 & (b_2)_N \\ 0 & 0 & 0 & (c_4)_N & 0 & (c_2)_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta p_{N-1} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta z_{N-1} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_6)_N & (a_{10})_N & 0 & (a_3)_N & (a_1)_N & 0 & (a_7)_N \\ (b_6)_N & 0 & (b_8)_N & (b_3)_N & (b_9)_N & 0 & (b_1)_N \\ 0 & (c_6)_N & 0 & (c_3)_N & 0 & (c_1)_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \\ \delta z_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \\ (r_6)_N \\ (r_7)_N \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, saat  $j = N$  matriks di atas dapat dituliskan :

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Dalam hal ini, secara keseluruhan untuk  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ , secara sederhana dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} j &= 1 & : & [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j &= 2 & : & [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ & & : & \\ & & : & \\ j &= N - 1 & : & [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j &= N & : & [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (5.58)$$

dengan matriks-matriks  $A, \delta$ , dan  $\mathbf{r}$  adalah matriks-matriks yang elemennya adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & & [B_N] & [A_N] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{bmatrix}$$



Berdasarkan Persamaan (5.58), dapat dilihat bahwa matriks  $A$  adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada diagonal utamanya. Persamaan (5.58) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Diasumsikan matriks  $A$  adalah matriks *non-singular* sehingga matriks  $A$  dapat difaktorkan sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (5.59)$$

dengan

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} [I] & [\tau_1] & & & \\ & [I] & [\tau_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [I] & [\tau_{N-1}] \\ & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

dengan  $[I]$  adalah matriks identitas yang berukuran  $7 \times 7$  dan  $[\alpha_j]$ ,  $[\tau_j]$  merupakan matriks ukuran  $7 \times 7$  dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [\alpha_1][\tau_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\tau_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\tau_j] &= [C_j], j = 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya, disubstitusikan Persamaan (5.59) ke Persamaan (5.58) maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\delta = \mathbf{r} \quad (5.60)$$

dengan mendefinisikan  $\mathbf{U}\delta = \mathbf{W}$ , maka Persamaan (5.60) menjadi

$$\mathbf{L}\mathbf{W} = \mathbf{r} \quad (5.61)$$

dengan

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{bmatrix}$$

dan  $W_j]$  merupakan matriks  $7 \times 1$  dengan setiap elemennya diperoleh dari Persamaan (5.61) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks  $\mathbf{W}$ , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari  $\delta$  pada Persamaan  $\mathbf{U}\delta = \mathbf{W}$  dengan menggunakan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} [\delta_N] &= [W_N] \\ [\alpha_j] &= [W_j] - [\tau_j][\delta_{j+1}], 1 \leq j \leq N-1 \end{aligned}$$

Dalam hal ini, dengan diperolehnya nilai  $\delta$ , maka Persamaan (5.48)-(5.54) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan  $\mathbf{U}\delta = \mathbf{W}$  dengan menjalankan iterasi sampai kriteria konvergensi terpenuhi. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan  $v(0,t)$  dan iterasi berhenti saat didapatkan  $|\delta v(0,t)| < \epsilon$ , dimana nilai dari  $\epsilon$  sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan  $\epsilon = 10^{-5}$  (Mohammad, 2014).

### 5.5 Validasi Model

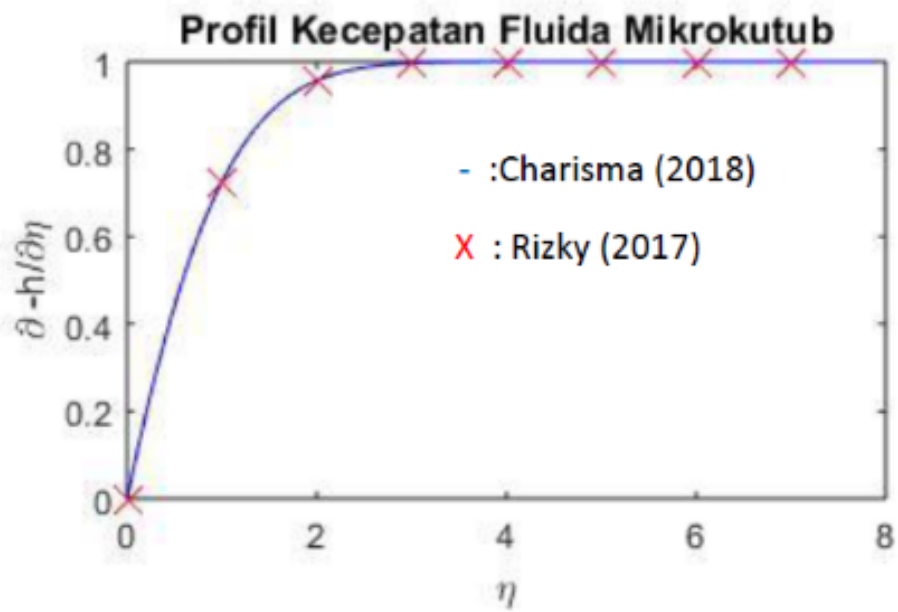
Sebelum melangkah pada tahap simulasi, terlebih dahulu dilakukan validasi model. Validasi model adalah usaha menyimpulkan apakah model sistem merupakan perwakilan yang sah dari realitas yang dikaji sehingga dapat dihasilkan kesimpulan yang meyakinkan. Sedangkan validasi merupakan perbandingan hasil perhitungan numerik yang diperoleh dengan hasil peneliti sebelumnya yang telah mendapat pengakuan secara akademik, misalnya telah dipublikasikan dalam jurnal atau telah diseminasikan pada *international conference*.

Pada penelitian ini, akan dilakukan validasi dengan model penelitian ini dengan penelitian yang dihasilkan oleh Rizky Verdyanto Pratomo (2017) dengan judul "*Unsteadymagnetohydrodynamics micropolar fluid in boundary layer flow past a sphere influenced by magnetic fluid*". Validasi dilakukan pada grafik profil kecepatan dan profil microrotasi.

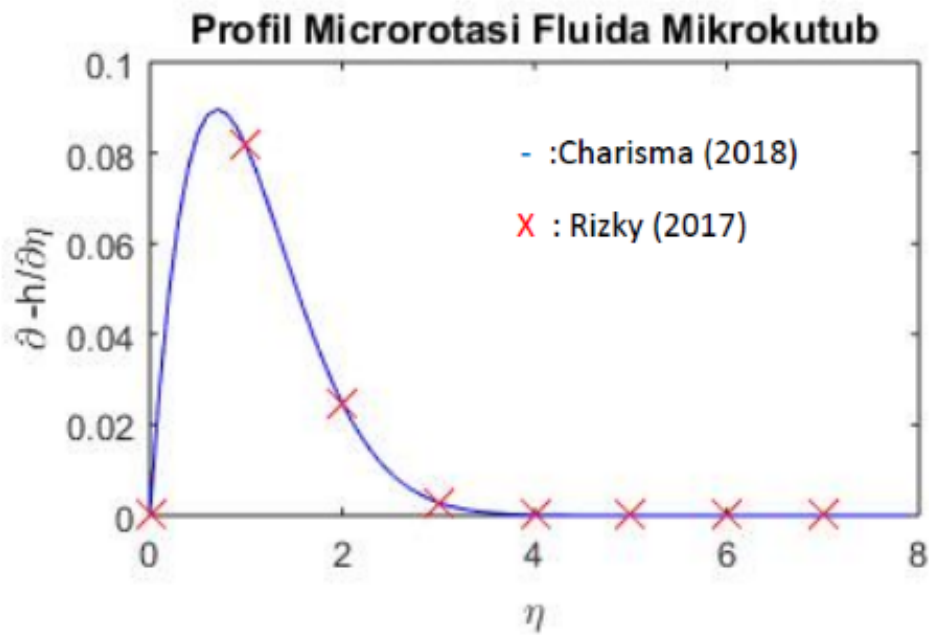
Berikut ini adalah data yang diambil dari penelitian yang dihasilkan oleh Rizky Verdyanto Pratomo (2017) dan Charisma JK (2018):

Tabel 5.1: Data Validasi Profil Kecepatan dan Microrotasi

$\eta$	Kecepatan (Rizky)	Kecepatan (Charisma)	Microrotasi (Rizky)	Microrotasi (Charisma)
0	0	0	0	0
1	0.7252	0.7252	0.0815	0.0815
2	0.9570	0.9570	0.0248	0.0248
3	0.9965	0.9965	0.0028	0.0028
4	0.9998	0.9998	0.0001	0.0001
5	0.9999	0.9999	0	0
6	0.9999	0.9999	0	0
7	0.9999	0.9999	0	0



Gambar 5.2: Profil kecepatan pada validasi model



Gambar 5.3: Profil microrotasi pada validasi model

Selanjutnya, dengan parameter dan variabel bergantung sama dengan penelitian Rizky, maka diperoleh hasil grafik pada (Gambar 5.2) dan (Gambar 5.3) sehingga hasil validasi tersebut mendekati nilai kecepatan dan profil microrotasi pada penelitian sebelumnya sehingga model pada penelitian ini adalah valid.

## 5.6 Simulasi dan Analisa Hasil

Tahapan selanjutnya setelah diperoleh penyelesaian numerik adalah simulasi menggunakan software Matlab 2015a. Pada simulasi penelitian ini menggunakan beberapa parameter dan dilakukan dengan beberapa kali percobaan parameter. Namun, hanya ditampilkan beberapa hasil simulasi yang dapat mewakili percobaan simulasi yang telah dilakukan. Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, didapatkan hubungan antara parameter magnetik ( $M$ ), bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter konveksi ( $\alpha$ ), parameter porositas ( $\phi$ ) dan parameter mikropolar ( $K$ ) terhadap kecepatan ( $f'$ ), profil mikrorotasi ( $h$ ) dan temperatur ( $s$ ). Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut.

### 5.6.1 Pengaruh Parameter Magnetik

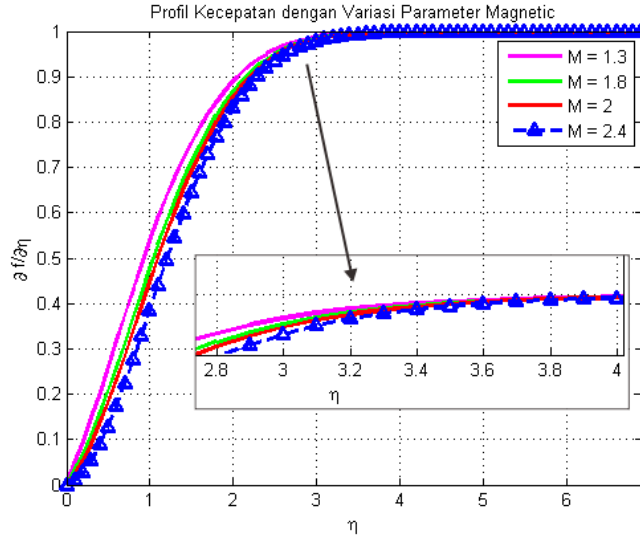
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik terhadap kurva kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi parameter magnetik yaitu  $= 1.3, 1.8, 2, 2.3$ . Nilai parameter yang lainnya, yaitu  $Pr = 1$ ,  $\phi = 1$ , banyak partisi  $\eta = 70$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 30$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 20$ . Nilai  $M = 0$  menyatakan tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran terhadap kecepatan dan mikro rotasi fluida micropolar. Variasi parameter magnetik yang digunakan pada simulasi ini merupakan representasi dari benda-benda bermagnet, seperti pada tabel berikut ini:

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.4) didapatkan bahwa hasil

Tabel 5.2: Variasi Parameter Magnetic

No	Benda Bermagnet	$\rho(kg/m^3)$	$\sigma$	M
1	Zn/Zinc/Seng	$7.14 \times 10^3$	$1.68 \times 10^7$	2.3
2	Fe/Iron/Besi	$7.87 \times 10^3$	$1.04 \times 10^7$	1.3
3	Steel/Baja	$7.75 \times 10^3$	$1.61 \times 10^7$	2
4	Kobalt	$8.86 \times 10^3$	$1.6 \times 10^7$	1.8

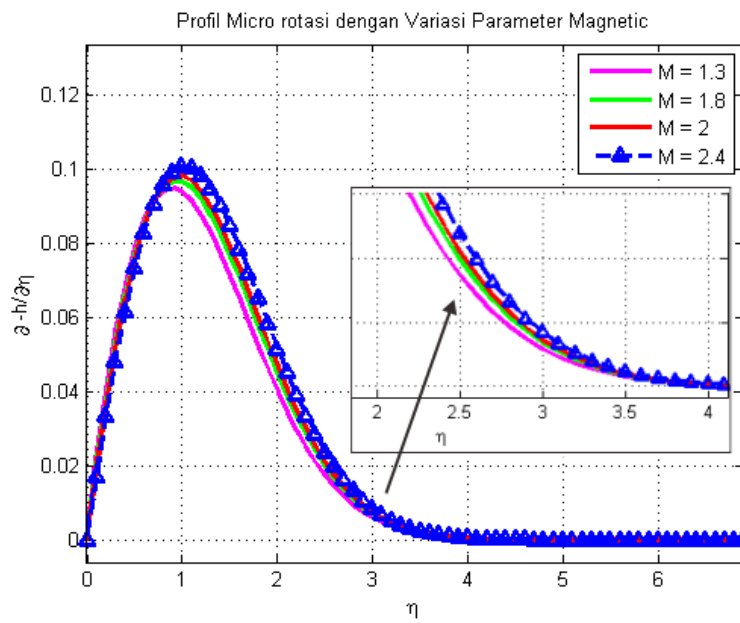
simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka kecepatan fluida semakin berkurang. Dalam hal ini terjadi karena pengaruh besarnya gaya Lorentz pada bola bermagnet yang mengakibatkan fluida yang melalui bola bermagnet menerima gaya Lorentz. Hal tersebut dapat terlihat pada  $M = \frac{\alpha\sigma(B_0)^2}{\rho U_\infty}$  yang menunjukkan bahwa parameter magnetik  $M$  berbanding lurus dengan besar gaya Lorentz yang bekerja pada sistem  $B_0$ . Oleh karena itu, parameter magnetic semakin besar maka gaya Lorentz semakin meningkat yang mengakibatkan kecepatan menurun.



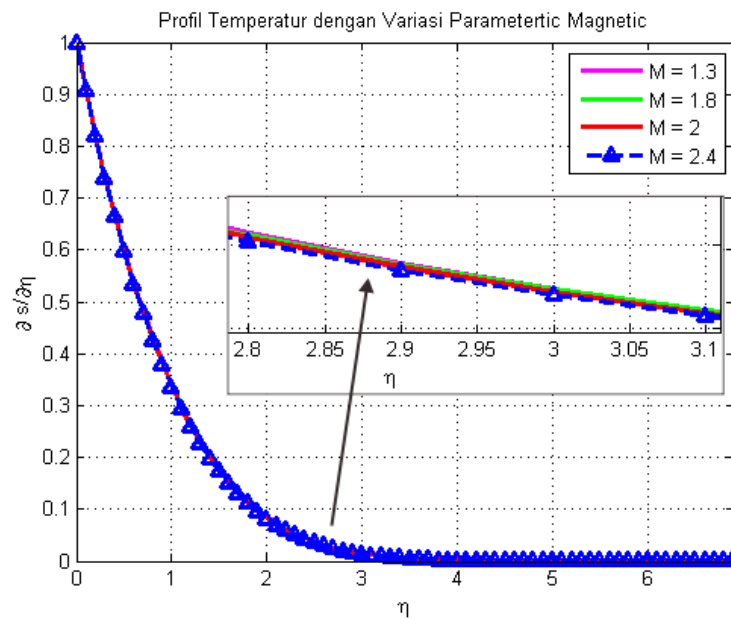
Gambar 5.4: Grafik variasi parameter magnetic pada profil kecepatan

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.5) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva profil microrotasi dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka profil microrotasi lebih awal cepat pada  $\eta \approx 4$ . Selanjutnya, profil microrotasi lebih awal lambat pada  $-h \approx 0.0925$  dan akan menurun secara signifikan menuju ke nilai 0. Dalam hal ini terjadi karena fluida pertama menyentuh permukaan bola pada titik stagnasi sehingga kecepatan nol yang berarti rasio antara gesekan fluida dipermukaan dengan komponen vektor mikrorotasi bernilai nol. Hal ini menyebabkan elemen mikrorotasi yang berada di dekat permukaan bola tidak dapat melakukan mikrorotasi.

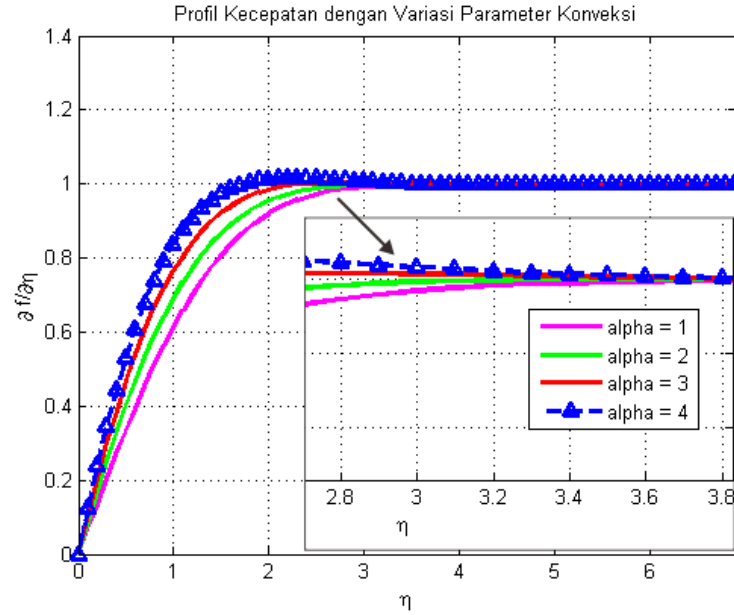
Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.6) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Ketika  $0 < \eta < 3.5$ , temperatur semakin menurun ketika parameter magnetik semakin bertambah. Dalam hal ini terjadi karena energi internal fluida semakin meningkat. Energi internal fluida meningkat karena pengaruh medan magnet dan densitas semakin berkurang dengan bertambahnya parameter magnetik. Karena energi internal semakin meningkat, maka energi yang digunakan fluida untuk bergerak berkurang. Dengan demikian, densitas juga berkurang yang berarti kerapatan molekul fluida berkurang sehingga distribusi panas antar fluida berkurang. Dalam hal ini berakibat temperatur mengalami penurunan seiring bertambahnya parameter magnetik.



Gambar 5.5: Grafik variasi parameter magnetic pada profil microrotasi



Gambar 5.6: Grafik variasi parameter magnetic pada profil temperatur



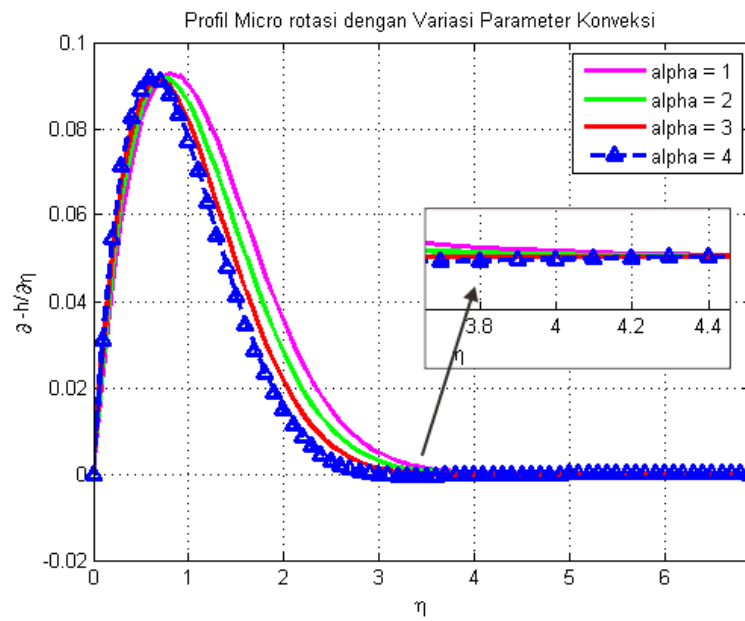
Gambar 5.7: Grafik variasi parameter konveksi pada profil kecepatan

### 5.6.2 Pengaruh Parameter Konveksi

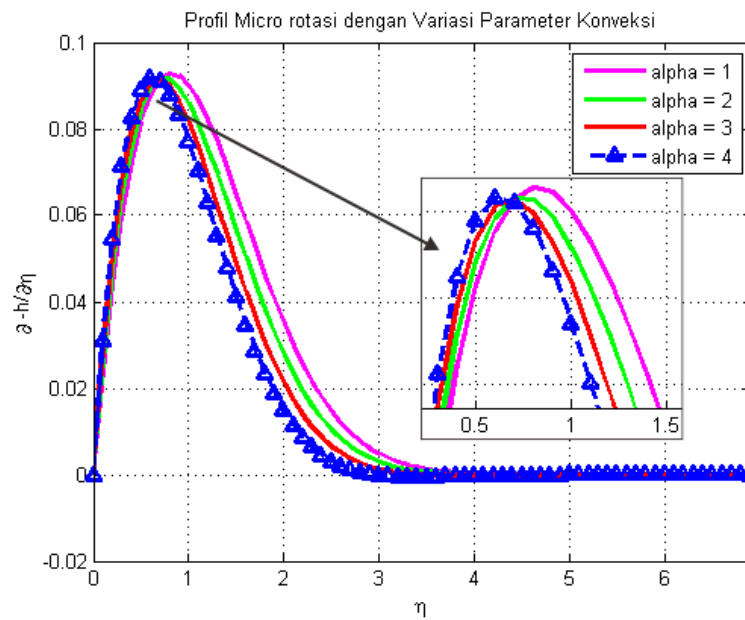
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter konveksi terhadap kurva kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi parameter konveksi yaitu  $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5$ . Dalam hal ini, nilai  $\alpha = 0$  menunjukkan konveksi paksa dan nilai  $\alpha > 0$  menunjukkan konveksi campuran. Nilai parameter yang lainnya, yaitu  $M = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $\phi = 1$ , banyak partisi  $\eta = 70$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 35$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 20$ .

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.7) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter konveksi terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$ . Dalam hal ini, ketika  $0 < \eta < 3.8$ , semakin besar nilai parameter konveksi maka kecepatan fluida semakin meningkat. Hal tersebut terjadi karena *heater* berada didekat titik stagnasi terendah untuk *assisting convection* sehingga mengakibatkan kerapatan fluida semakin menurun. Apabila kerapatan fluida semakin menurun maka kecepatan fluida semakin meningkat.

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.8) dan (Gambar 5.9) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter konveksi terhadap kurva profil mikrorotasi dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai parameter konveksi maka profil mikrorotasi lebih awal lambat pada  $\eta \approx 4.2$ . Selanjutnya, profil mikrorotasi lebih awal cepat pada  $-h \approx 0.091$  dan akan menurun secara signifikan menuju ke nilai 0. Hal tersebut terjadi karena adanya peningkatan koefisien konveksi yang menyebabkan kecepatan fluida meningkat sehingga mikrorotasi antar partikel fluida juga semakin meningkat.

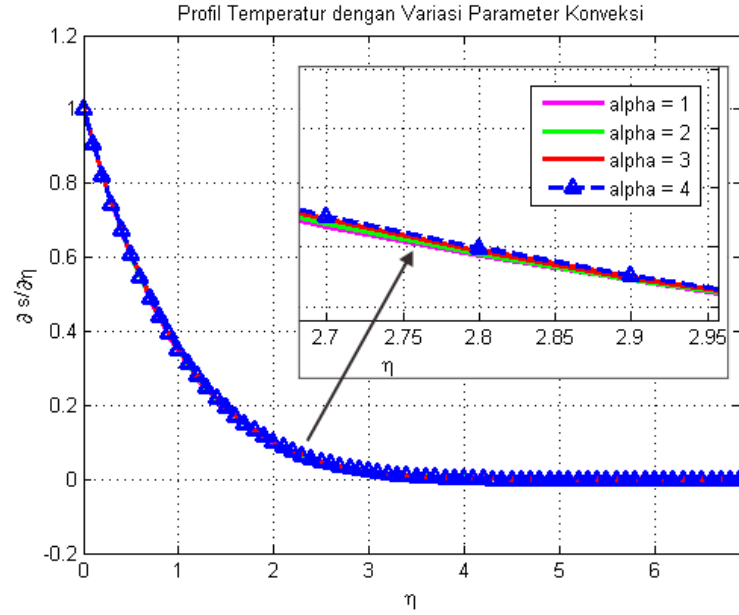


Gambar 5.8: Grafik variasi parameter konveksi pada profil microrotasi



Gambar 5.9: Grafik variasi parameter konveksi pada profil microrotasi





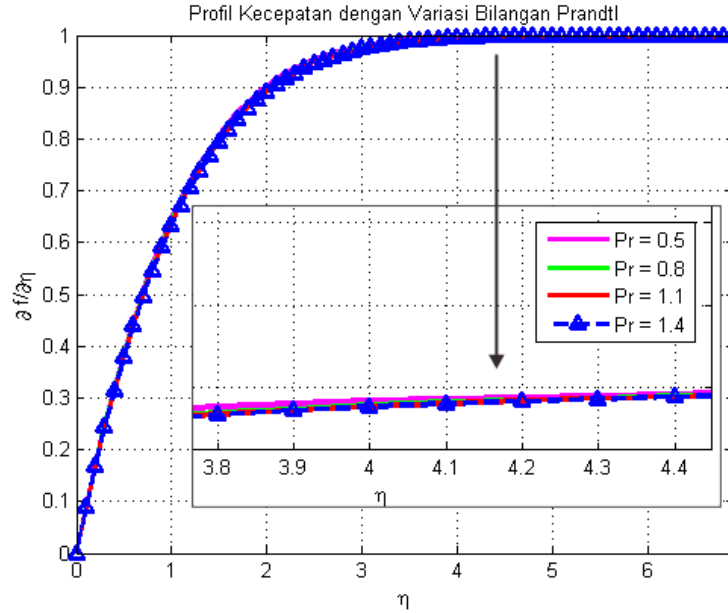
Gambar 5.10: Grafik variasi parameter konveksi pada profil temperatur

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.10) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter konveksi terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Ketika  $0 < \eta < 3$ , temperatur fluida semakin menurun ketika parameter konveksi semakin bertambah. Secara matematis  $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$  yang berarti jika parameter konveksi semakin bertambah maka bilangan Grashof semakin besar ( $\alpha \sim Gr$ ). Apabila bilangan Grashof semakin besar maka viskositas semakin kecil. Viskositas semakin kecil maka temperatur fluida semakin meningkat.

### 5.6.3 Pengaruh Bilangan Prandtl

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi bilangan Prandtl yaitu  $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5$ . Nilai parameter yang lainnya, yaitu  $M = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\phi = 1$ , banyak partisi  $\eta = 70$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 35$  dengan  $\Delta t = k^n = 1 \times 10^{-2}$  dan  $t = 35$ .

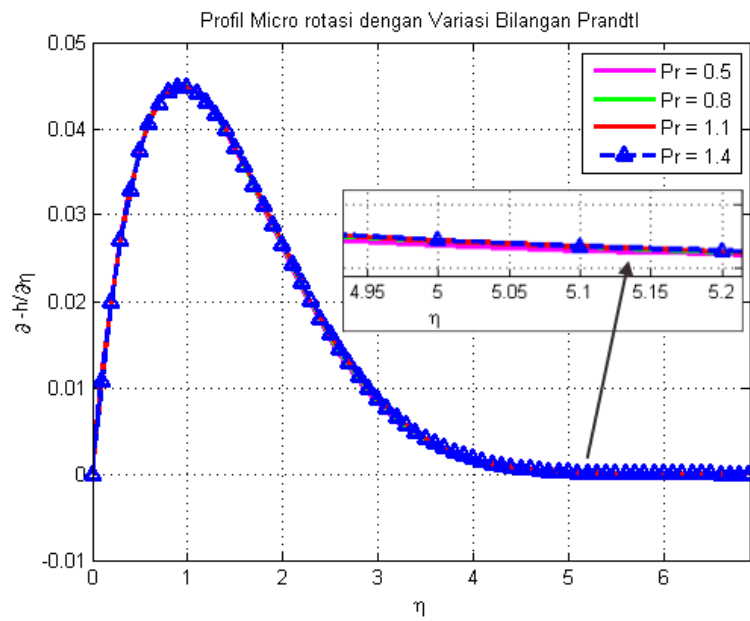
Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.11) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$ . Dalam hal ini, saat  $0 < \eta < 4.4$ , semakin besar nilai bilangan Prandtl maka kecepatan fluida semakin menurun. Hal tersebut terjadi karena bilangan Prandtl sebanding dengan besar viskositas kinematik dan berbanding terbalik dengan difusivitas panas. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan semakin besar viskositas kinematik pada fluida tersebut sehingga densitas fluida semakin meningkat. Apabila densitas fluida semakin meningkat maka kecepatan fluida semakin menurun.



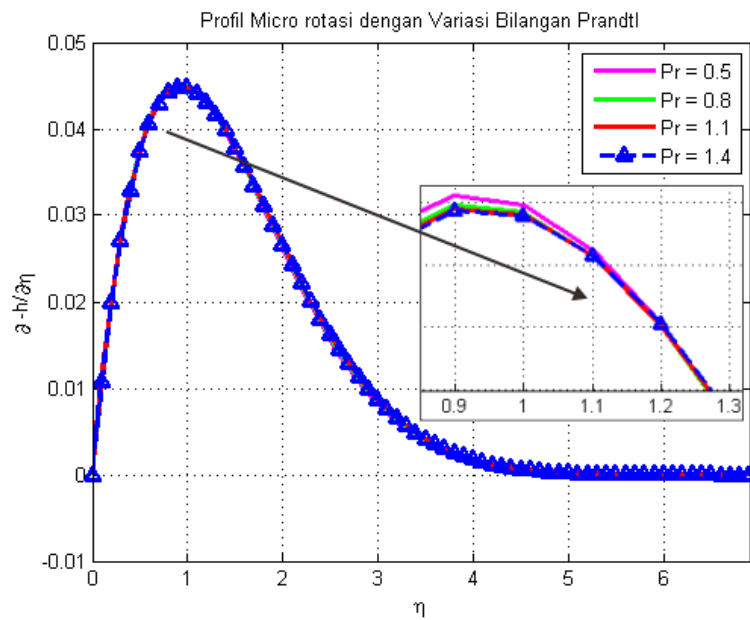
Gambar 5.11: Grafik variasi bilangan prandtl pada profil kecepatan

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.12) dan (Gambar 5.13) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva profil microrotasi dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai bilangan Prandtl maka profil microrotasi lebih awal cepat pada  $\eta \approx 5.1$ . Selanjutnya, profil microrotasi lebih awal lambat pada  $-h \approx 0.043$  dan akan menurun secara signifikan menuju ke nilai 0. Hal tersebut terjadi karena adanya peningkatan koefisien bilangan Prandtl yang menyebabkan kecepatan fluida menurun sehingga microrotasi antar partikel fluida juga semakin menurun.

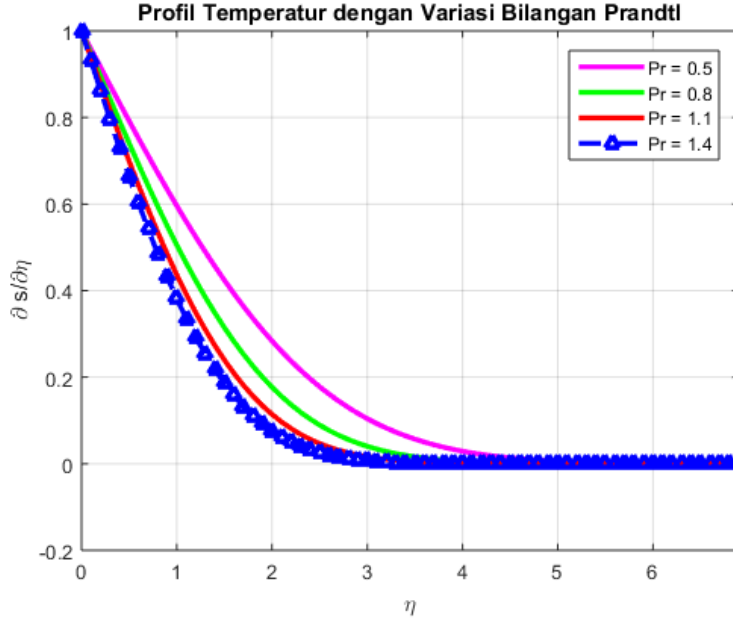
Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.14) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Ketika  $0 < \eta < 5$ , temperatur semakin menurun ketika bilangan Prandtl semakin bertambah. Secara matematis  $Pr = \frac{v\rho C_p}{c}$  yang artinya bilangan Prandtl merupakan perbandingan viskositas kinematika dengan difusivitas termal. Viskositas kinematika berkaitan dengan kecepatan perpindahan antar molekul, sedangkan difusivitas termal berkaitan dengan perbandingan penerusan panas dengan kapasitas penyimpanan energi molekul. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan difusivitas termal semakin kecil karena bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Ini berarti bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka distribusi panas antar fluida berkurang atau dapat dikatakan bahwa perpindahan panas ke permukaan benda lebih cepat daripada fluidanya sehingga mengakibatkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.



Gambar 5.12: Grafik variasi bilangan prandtl pada profil microrotasi



Gambar 5.13: Grafik variasi bilangan prandtl pada profil microrotasi

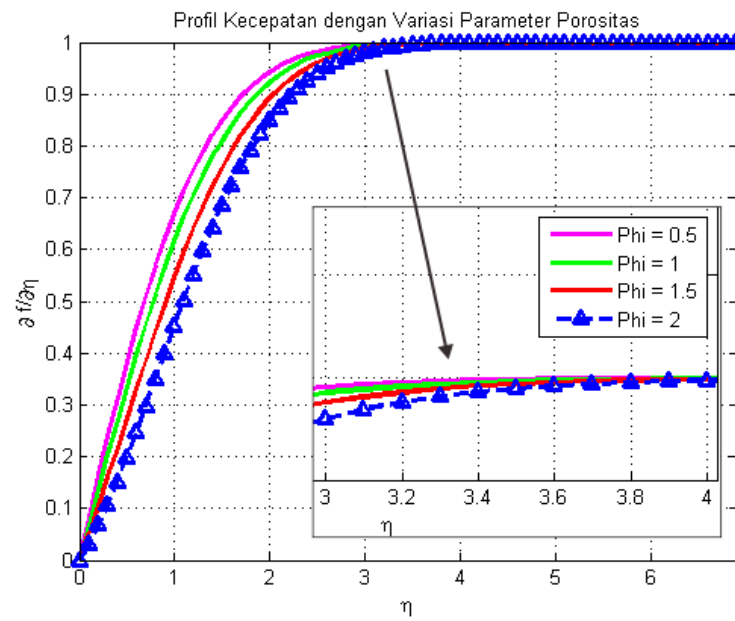


Gambar 5.14: Grafik variasi bilangan prandtl pada profil temperatur

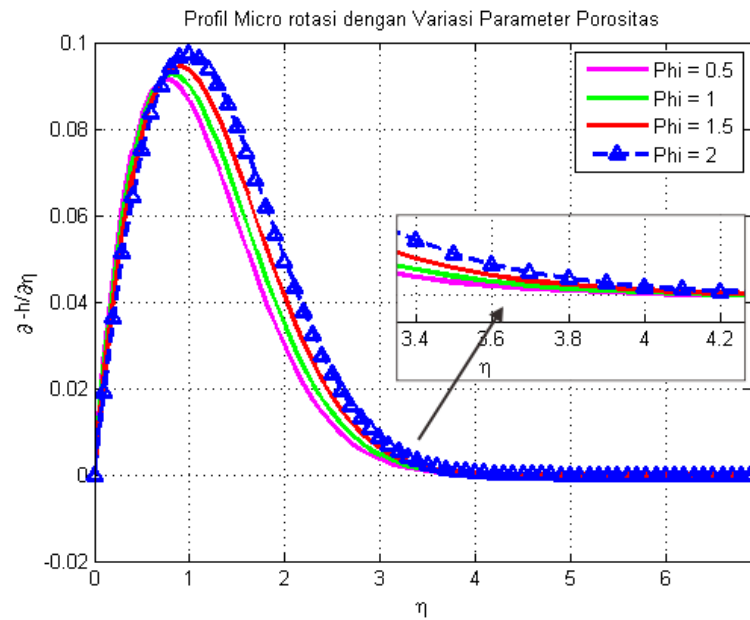
#### 5.6.4 Pengaruh Parameter Porositas

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter Porositas terhadap kurva kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi parameter Porositas yaitu  $\phi = 0, 0.5, 1, 1.5$ . Nilai parameter yang lainnya, yaitu  $M = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $Pr = 1$ , banyak partisi  $\eta = 70$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 35$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 20$ .

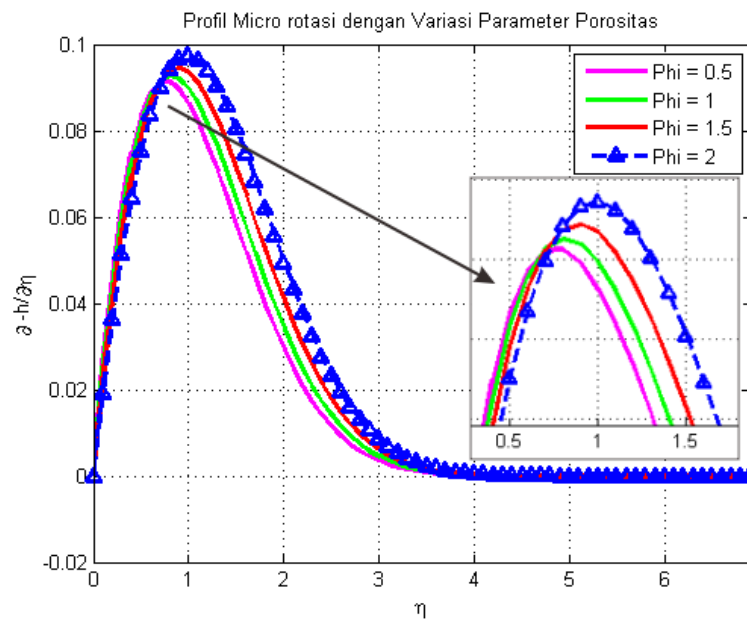
Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.15) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter porositas terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$ . Dalam hal ini, saat  $0 < \eta < 3.6$ , semakin besar nilai parameter porositas maka kecepatan fluida semakin menurun. Secara matematis  $\phi = \frac{\alpha\mu}{\rho U_\infty K^*}$  yaitu parameter porositas sebanding dengan viskositas dinamik  $\mu$  dan berbanding terbalik dengan densitas fluida ( $\rho$ ). Sehingga semakin bertambahnya parameter porositas, viskositas dinamik pada aliran fluida semakin meningkat maka densitas fluida semakin menurun. Dalam hal ini, karena densitas fluida menurun dan porositas semakin meningkat maka kecepatan fluida semakin menurun.



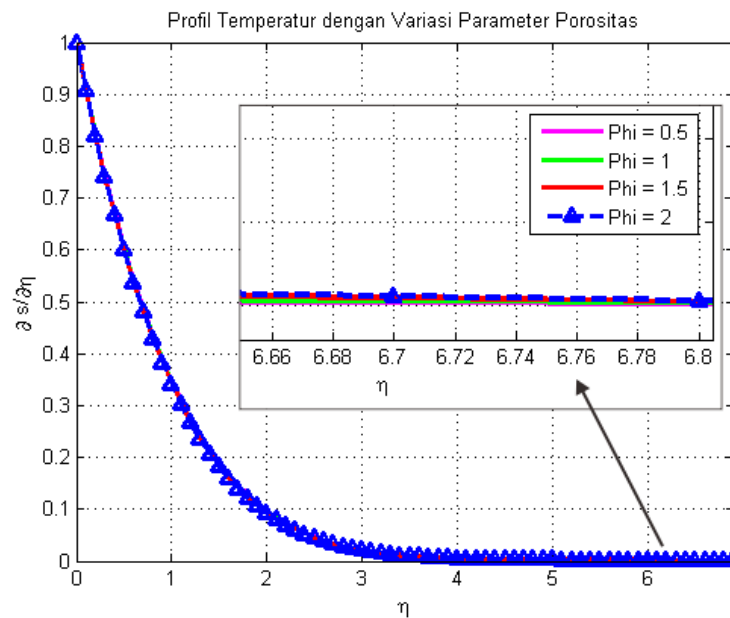
Gambar 5.15: Grafik variasi parameter porositas pada profil kecepatan



Gambar 5.16: Grafik variasi parameter porositas pada profil microrotasi



Gambar 5.17: Grafik variasi parameter porositas pada profil microrotasi



Gambar 5.18: Grafik variasi parameter porositas pada profil temperatur

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.16) dan (Gambar 5.17) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter porositas terhadap kurva profil microrotasi dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai bilangan Prandtl maka profil microrotasi lebih awal cepat pada  $\eta \approx 4.2$ . Selanjutnya, profil microrotasi lebih awal lambat pada  $-h \approx 0.093$  dan akan menurun secara signifikan menuju ke nilai 0. Hal tersebut terjadi karena adanya peningkatan koefisien parameter porositas yang menyebabkan kecepatan fluida menurun sehingga microrotasi antar partikel fluida juga semakin menurun.

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.18) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter porositas terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Ketika  $0 < \eta < 3.5$ , temperatur semakin menurun ketika parameter porositas semakin bertambah. Dalam hal ini terjadi karena kecepatan fluida semakin berkurang maka *skin friction* menurun sehingga temperatur mengalami penurunan.

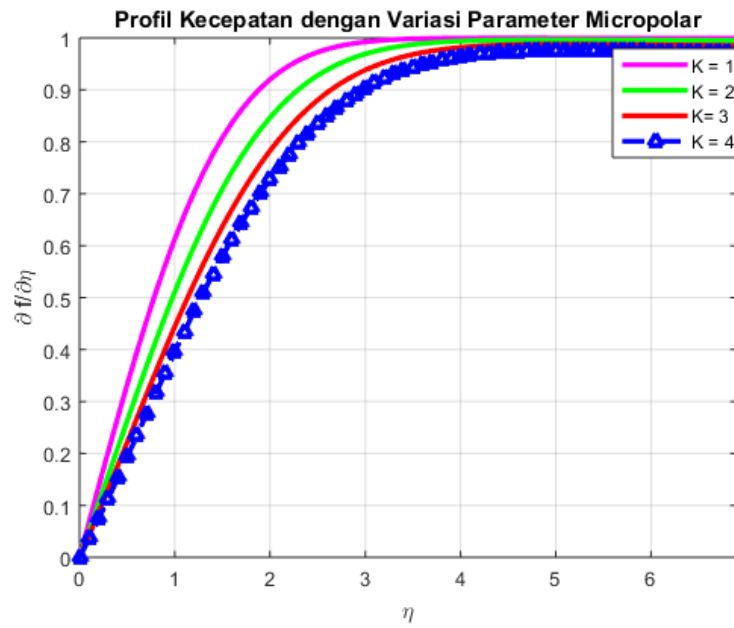
#### 5.6.5 Pengaruh Parameter Micropolar

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter Micropolar terhadap kurva kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi parameter Porositas yaitu  $K^* = 0, 0.5, 1, 1.5$ . Nilai parameter yang lainnya, yaitu  $M = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $Pr = 1$ , banyak partisi  $\eta = 70$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 35$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 20$ .

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.19) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter micropolar terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$ . Dalam hal ini, saat  $0 < \eta < 4$ , semakin besar nilai parameter micropolar maka kecepatan fluida semakin menurun. Secara matematis  $K = \frac{\kappa}{\mu}$  yaitu parameter micropolar sebanding dengan pergerakan microrotasi dan berbanding terbalik dengan viskositas dinamik. Sehingga semakin bertambahnya parameter micropolar, pergerakan microrotasi pada aliran fluida semakin meningkat dengan nilai viskositas dinamik yang menurun. Hal tersebut mengakibatkan kecepatan fluida semakin menurun.

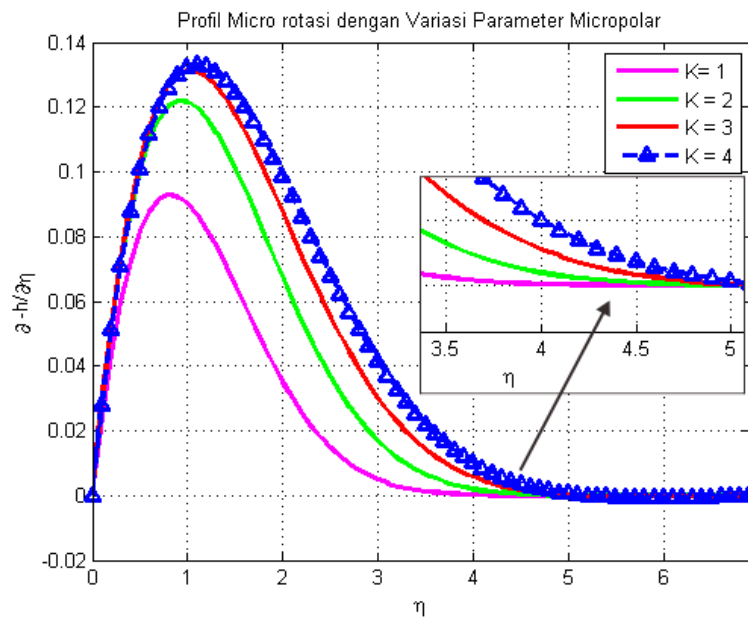
Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.20) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter micropolar terhadap kurva profil microrotasi dan dapat diamati bahwa semakin besar nilai parameter micropolar maka profil microrotasi lebih awal cepat pada  $\eta \approx 5$ . Selanjutnya, profil microrotasi lebih awal lambat pada  $-h \approx 0.13$  dan akan menurun secara signifikan menuju ke nilai 0. Dalam hal ini terjadi karena fluida pertama menyentuh permukaan bola pada titik stagnasi sehingga kecepatan nol yang berarti rasio antara gesekan fluida dipermukaan dengan komponen vektor mikrorotasi bernilai nol. Hal ini menyebabkan elemen mikrorotasi yang berada di dekat permukaan bola tidak dapat melakukan mikrorotasi.

Berdasarkan hasil grafik pada (Gambar 5.21) didapatkan bahwa hasil simulasi pengaruh parameter micropolar terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$ . Ketika  $0 < \eta < 4$ , temperatur semakin menurun ketika parameter micropolar semakin bertambah. Dalam hal ini terjadi karena kecepatan fluida semakin berkurang maka *skin friction* menurun sehingga temperatur mengalami penurunan.

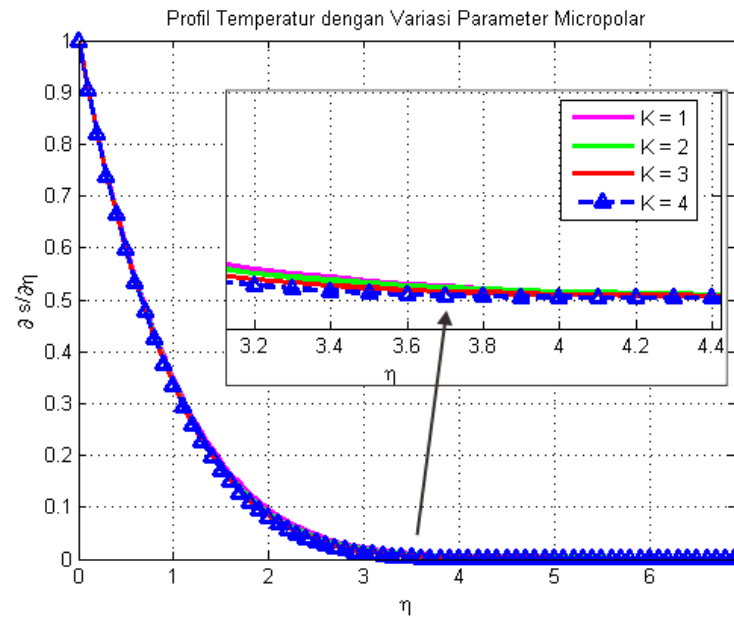


Gambar 5.19: Grafik variasi parameter micropolar pada profil kecepatan





Gambar 5.20: Grafik variasi parameter micropolar pada profil microrotasi



Gambar 5.21: Grafik variasi parameter micropolar pada profil microrotasi

## 5.7 Diskusi Hasil Penelitian

Model matematika dari magnetohidrodinamik tak tunak dengan konveksi paksa pada fluida micropolar yang melalui bola berpori diperoleh hasil akhir, berikut ini merupakan model *small time* pada Persamaan Momentum Linear, Persamaan Momentum Angular dan Persamaan Energi sebagai berikut :

### 1. Persamaan Momentum Linear

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] + Kh' + (M + \Phi)t(f' - 1) = t\frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{2}{3}\alpha st \quad (5.62)$$

### 2. Persamaan Momentum Angular

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fh' - hf') = t\frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'') \quad (5.63)$$

### 3. Persamaan Energi

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' + \frac{3}{2}Prtf s' = Prt\frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.64)$$

dengan kondisi batasnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} t &= 0 ; f = f' = h = s = 0 ; \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t &> 0 ; f = f' = 0 ; h = -nf'' ; s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ f' &= 1 ; s = 0 ; h = 0 ; \text{ pada } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.65)$$

Dalam hal ini, Model matematika dari magnetohidrodinamik tak tunak dengan konveksi paksa pada fluida micropolar yang melalui bola berpori didapat dari empat persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, momentum angular, dan persamaan energi. Persamaan kontinuitas didapat dari hukum konservasi massa yang menyatakan bahwa laju perubahan massa terhadap waktu sama dengan nol. Persamaan momentum didapat dari Hukum II Newton yang menyatakan bahwa besarnya laju perubahan momentum sama dengan jumlah semua gaya yang bekerja pada sistem. Dalam persamaan momentum pemberian magnet pada bola menyebabkan persamaan pada gaya magnet bernilai negatif yang berarti medan magnet menolak aliran fluida. Persamaan momentum angular didapat dari Hukum Kekekalan Momentum Angular dengan mengasumsikan bahwa semua torsi muncul dari gaya makroskopik. Selanjutnya, persamaan energi didapat dari Hukum Termodinamika I. Persamaan Pembangun dimensional kemudian ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensional, selanjutnya dilakukan pendekatan lapisan batas, fungsi alir, dan dirubah kedalam bentuk persamaan similiaritas sehingga diperoleh model akhir tersebut.

## BAB 6

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa, pembahasan, serta simulasi numerik dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola berpori di dalam fluida mikrokutub di bawah pengaruh medan magnet dan konveksi campuran dengan menggunakan beberapa variasi parameter, yaitu parameter magnetik ( $M$ ), bilangan Prandtl ( $Pr$ ), parameter konveksi ( $\alpha$ ), parameter porositas ( $\phi$ ) dan parameter micropolar ( $K$ ) terhadap kecepatan, profil mikrorotasi dan temperatur, dapat disimpulkan sebagai berikut :

- i. Berdasarkan hasil diskusi penelitian maka model matematika dari magnetohidrodinamik tak tunak dengan konveksi paksa pada fluida micropolar yang melalui bola berpori didapat dari empat persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, momentum angular, dan persamaan energi. Persamaan kontinuitas didapat dari hukum konservasi massa yang menyatakan bahwa laju perubahan massa terhadap waktu sama dengan nol. Persamaan momentum didapat dari Hukum II Newton yang menyatakan bahwa besarnya laju perubahan momentum sama dengan jumlah semua gaya yang bekerja pada sistem. Dalam persamaan momentum pemberian magnet pada bola menyebabkan persamaan pada gaya magnet bernilai negatif yang berarti medan magnet menolak aliran fluida. Persamaan momentum angular didapat dari Hukum Kekekalan Momentum Angular dengan mengasumsikan bahwa semua torsi muncul dari gaya makroskopik. Selanjutnya, persamaan energi didapat dari Hukum Termodinamika I. Persamaan Pembangun dimensional kemudian ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensional, selanjutnya dilakukan pendekatan lapisan batas, fungsi alir, dan dirubah kedalam bentuk persamaan similiaritas untuk mendapatkan model akhir.
- ii. Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, parameter porositas dan parameter micropolar didapatkan bahwa:
  - (a) Pengaruh parameter magnetik ( $M$ ) adalah semakin besar parameter magnetik ( $M$ ) maka kecepatan fluida semakin menurun saat mendekati bola pada  $0 < \eta < 4$ , profil mikrorotasi semakin meningkat pada  $0.75 < \eta < 4$  kemudian menurun pada  $0 < \eta < 0.75$  dan temperatur semakin menurun pada  $0 < \eta < 3.5$ . Hal

tersebut terjadi karena pengaruh besarnya gaya Lorentz pada bola bermagnet yang mengakibatkan fluida yang melalui bola bermagnet menerima gaya Lorentz. Hal tersebut dapat terlihat pada  $M = \frac{\alpha \sigma (B_0)^2}{\rho U_\infty}$  yang menunjukkan bahwa parameter magnetik  $M$  berbanding lurus dengan besar gaya Lorentz yang bekerja pada sistem  $B_0$ . Oleh karena itu, parameter magnetic semakin besar maka gaya Lorentz semakin meningkat yang mengakibatkan kecepatan menurun.

- (b) Pengaruh parameter konveksi ( $\alpha$ ) adalah semakin besar parameter konveksi ( $\alpha$ ) maka kecepatan fluida semakin meningkat pada  $0 < \eta < 3.8$ , profil mikrorotasi semakin menurun pada  $0.7 < \eta < 4.2$  kemudian meningkat pada  $0 < \eta < 0.7$  dan temperatur semakin meningkat pada  $0 < \eta < 3$ .
- (c) Pengaruh bilangan Prandtl ( $Pr$ ) adalah semakin besar bilangan Prandtl ( $Pr$ ) maka kecepatan semakin menurun saat mendekati bola pada  $0 < \eta < 4.4$ , profil mikrorotasi semakin meningkat pada  $1.3 < \eta < 5.1$  kemudian menurun pada  $0 < \eta < 1.3$  dan temperatur semakin menurun pada  $0 < \eta < 5$ .
- (d) Pengaruh parameter porositas ( $\phi$ ) adalah semakin besar parameter porositas ( $\phi$ ) maka kecepatan fluida semakin menurun saat mendekati bola pada  $0 < \eta < 3.6$ , profil mikrorotasi semakin meningkat pada  $0.7 < \eta < 4.2$  kemudian menurun pada  $0 < \eta < 0.7$  dan temperatur semakin menurun pada  $0 < \eta < 3.5$ .
- (e) Pengaruh parameter micropolar ( $K$ ) adalah semakin besar parameter micropolar ( $K$ ) maka kecepatan fluida semakin menurun saat mendekati bola pada  $0 < \eta < 4$ , profil mikrorotasi semakin meningkat pada  $0.7 < \eta < 5$  kemudian menurun pada  $0 < \eta < 0.7$  dan temperatur semakin menurun pada  $0 < \eta < 4$ .

## 6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya adalah ttudi lapisan batas tidak pada titik stagnasi, sehingga dapat dilihat kurva kecepatan, profil microrotasi dan temperatur disekeliling permukaan bola berpori bermagnet dengan fluida magnetohidrodinamik.

## **PERNYATAAN RESMI**

Penelitian ini didukung oleh Lembaga Penelitian dan Pengembangan Masyarakat/LPPM, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, Jawa Timur, Indonesia dengan nomor surat persetujuan pendanaan 970/PKS/ITS/2018. Kami mengucapkan terimakasih kepada LPPM-ITS yang telah memberikan kesempatan untuk menyajikan penelitian ini pada Jurnal Internasional.



## DAFTAR PUSTAKA

- Arber, T. (2013), *Fundamental of Magnetohydrodynamics*, Lecture Handout: University of Warwick, UK.
- Abdel-Rahman, G. M. (2009). Studying effect of MHD on Thin films of a micropolar fluid. *Physica B: Condensed Matter*. 404(21):3859-3866.
- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I. Md., dan Abdullah, F.A., (2012), "The Implicit Keller-Box Method for The One Dimensional Time Fractional Diffusion Equation", *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, Vol. 2, No. 3, hal. 69-84.
- Anggriani, I, Widodo, B., dan Imron, C. (2015), The Unsteady Flow Magnetohydrodynamic in Micropolar Fluid through Porous Sphere, *Proceeding of The 6th Annual Basic Science International Conference*.
- Anggriani, I. (2016), *Pengaruh Magnetohidrodinamik (MHD) pada Fluida Micropolar yang Melewati Bola Berpori*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Ali, F. M., Nazar, R., Arifin, N. M (2010), Numerical Solutions of Unsteady Boundary Layer Flow Due to an Impulsively Stretching Surface, *Journal of Applied Computer Science and Mathematics*, no. 8(4).
- Bejan, A. (2013), *Convection Heat Transfer*, 4th Edition, John Wiley, United States Of America.
- Fox, R.W., McDonald, A.T., dan Pritchard, P.J., (2011), *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th edition, John Wiley and Sons, United States Of America.
- Hsiao, K. L. (2011), "MHD Mixed Convection for Viscoelastic Fluid Past A Porous Wedge", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, No. 1, Hal. 1-8.
- Ishak, A., Nazar, R., Bachok, N. and Pop, I. (2010), "MHD Mixed Convection Flow Adjacent to A Vertical Plate with Prescribed Surface Temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 21, Hal. 4506-4510.
- Jat, R. N., Saxena, V., dan Rajotia, D. 2012. MHD Stagnation Point Flow and Heat Transfer of a Micropolar Fluid in a Porous Medium. *Journal of International Academy of Physical Sciences*. Vol.16 No.4.
- Kucaba-Pietal (2004), Microchannels Flow Modelling With The Micropolar Fluid Theory, *Bulletin of The Polish Academy of Science*, Vol.52, No.3.

- Mohammad, N. F., Mohd Kasim, A. R., Ali, A. and Shafie, S. (2012). Unsteady mixed convection boundary layer flow past a sphere in a micropolar fluid. In *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 1450. 211-217.
- Mohammad, N.F, (2014), Unsteady Magnetohydrodynamic Convective Boundary Layer Flow Past a Sphere In Viscous and Micropolar Fluids, Thesis Doctor of Philosophy (Mathematics). Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Prasad, K., Datti, P. and Vajravelu, K. (2013), "MHD Mixed Convection Flow over A Permeable Non-isothermal Wedge, *Journal of King Saud University-Science*, Vol. 25, No. 4, Hal. 313-324.
- Pratomo, R.V. (2017), *Magnetohidrodinamik yang Tak Tunak pada Lapisan Batas yang Mengalir Melalui Bola Di Dalam Fluida Mikrokatub Di Bawah Pengaruh Medan Magnet*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Potter dan Wiggert. (2011). *Mekanika Fluida*. Jakarta : Erlangga.
- Rahma, N. A. (2017), *Konveksi Paksa dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Tak Tunak yang Melalui Bola Berpori*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Surabaya.
- Satya Narayana, P., Venkateswarlu, B. and Venkataramana, S. (2013). Effects of Hall current and radiation absorption on MHD micropolar fluid in a rotating system. *Ain Shams Engineering Journal*. 4(4):843- 854.
- Uddin, Z., dan Kumar, M. (2013), "Hall and Ion-slip Effect on MHD Boundary Layer Flow of A Micropolar Fluid Past A Wedge", *Scientia Iranica*, Vol. 20, No. 3, Hal. 467-476.
- Versteeg, H. K., dan Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2nd edition, Pearson Education Limited, London
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITS PRESS, Surabaya.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015), The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow of A Viscous Fluid Past A Sphere, *International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE)*, Kuala Lumpur.
- Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T. and Purbandini (2016). Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included, *Far East Journal Mathematical and Sciences* (Puspha Publishing House India), Vol 99 No 2: 173-186.



## LAMPIRAN

1. Perolehan Penurunan pada Persamaan (4.14) pada Persamaan Kontinuitas.

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta_x \delta_y \delta_z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z \\
 &\Longleftrightarrow \left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right] \delta y \delta z \\
 &\quad + \left[ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial y}{2} \right] \delta x \delta z \\
 &\quad + \left[ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right] \delta x \delta y \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z \\
 &\Longleftrightarrow -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z \\
 &\Longleftrightarrow -\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \delta_x \delta_y \delta_z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z \\
 &\Longleftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \delta_x \delta_y \delta_z = 0
 \end{aligned}$$

2. Penurunan pada Gaya Permukaan.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (2(\mu + k) \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} ((\mu + k) (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})) \\
 &= 2(\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + k) (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mu + k) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}) \\
 &= (\mu + k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + k) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (\mu + k) (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mu + k) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}) \\
 &= (\mu + k) (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + (\mu + k) \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) \\
 &= (\mu + k) \nabla^2 \cdot \mathbf{u} + (\mu + k) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
 &= (\mu + k) \nabla^2 \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

3. Persamaan Pembangun pada Persamaan Momentum Linear :

Menurut Leal (1992), diasumsikan bahwa nilai maksimum  $(\bar{T} - T_\infty)$  kecil sehingga berdasarkan definisi pendekatan Deret Taylor, dapat diperoleh :

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2$$

Dengan menghilangkan bagian yang berorder tinggi, maka persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\rho_\infty}{\rho} &= 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) \\ \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} &= \beta(\bar{T} - T_\infty)\end{aligned}$$

dengan  $\beta$  adalah koefisien ekspansi panas, yaitu  $\beta = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_p$ . Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan tersebut maka diperoleh :

- (a) Persamaan Pembangun pada Persamaan Momentum Linear sumbu- $x$  :

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\ &- \rho \beta(\bar{T} - T_\infty)g_x + k\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} + \sigma(B_0)^2 \bar{u} \\ &- \frac{\mu}{K^*} \bar{u}\end{aligned}$$

- (b) Persamaan Pembangun pada Persamaan Momentum Linear sumbu- $y$  :

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\ &- \rho \beta(\bar{T} - T_\infty)g_y - k\frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \sigma(B_0)^2 \bar{v} \\ &- \frac{\mu}{K^*} \bar{v}\end{aligned}$$

dengan kondisi batas :

$$\begin{aligned}\bar{t} &< 0 ; \bar{u} = \bar{v}, \bar{T} = T_\infty, \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} &\geq 0 ; \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_W \text{ pada } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} &= \bar{u}_e(\bar{x}); \bar{T} = T_\infty, \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty\end{aligned}$$

#### 4. Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Tak-Berdimensi.

(a) Persamaan Kontinuitas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{r}\bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}\bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\
\frac{\partial(aruU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial arvU_\infty Re^{1/2}}{\partial ya Re^{1/2}} &= 0 \\
\frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial(ru)}{\partial(x)} + \frac{aU_\infty Re^{1/2}}{a Re^{1/2}} \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\
U_\infty \frac{\partial(ru)}{\partial(x)} + U_\infty \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial(ru)}{\partial(x)} + \frac{\partial rv}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

(b) Persamaan Momentum Linear sumbu-x.

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
&- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_x + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} + \sigma (B_0)^2 \bar{u} \\
&- \frac{\mu}{K^*} \bar{u}
\end{aligned}$$

Sisi Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(\frac{at}{U_\infty})} + (uU_\infty) \frac{\partial u U_\infty}{ax} + \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial u U_\infty}{ay Re^{-1/2}} \right) \\
&= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(uU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(vU_\infty^2)}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Sisi Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) &- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_x + k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma (B_0)^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u} \\
\Leftrightarrow &= -\frac{\partial p \rho U_\infty^2}{\partial xa} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(\frac{ya}{Re^{1/2}})^2} \right) \\
&- \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x + k \frac{\partial N U_\infty a^{-1} Re^{1/2}}{\partial(ya Re^{-1/2})} \\
&- \sigma (B_0)^2 (uU_\infty) - \frac{\mu}{K^*} u U_\infty \\
\Leftrightarrow &= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{U_\infty}{a^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&- \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x + k \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} \\
&- \sigma (B_0)^2 (uU_\infty) - \frac{\mu}{K^*} u U_\infty
\end{aligned}$$

Dengan Menyamakan Sisi Ruas Kiri dan Ruas Kanan dan selanjutnya membagi kedua sisi dengan  $\rho \frac{U_\infty^2}{a}$ , maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha T \sin x \\ &+ (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \Phi) u \end{aligned}$$

Dalam hal ini,  $M = \frac{a\sigma(B_0)^2}{\rho U_\infty}$ ,  $\Phi = \frac{a\mu}{\rho U_\infty K^*}$ ,  $K = \frac{k}{\mu}$ , dan  $\alpha = \frac{Gr}{Re}$  dengan  $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v^2}$ .

Persamaan Momentum Linear sumbu-y.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma (B_0)^2 \bar{v} \\ &- \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \end{aligned}$$

Sisi Ruas Kiri

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)} + \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ayRe^{1/2})} \right) \\ &= \rho \left( \frac{\left( \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\left( \frac{a}{U_\infty} \right) \partial t}}{\partial t} + (uU_\infty) \frac{\left( \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\partial (a)}}{\partial (a)} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial v}{\partial (aRe^{1/2})}}{\partial (aRe^{1/2})} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{uU_\infty^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{vU_\infty^2}{aRe^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{vU_\infty^2}{aRe^{1/2}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Sisi Ruas Kanan

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) &- \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_y - k \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma (B_0)^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \\ \Leftrightarrow &= -\frac{\partial (\rho p U_\infty^2)}{\partial (ayRe^{-1/2})} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) \\ &- k \frac{\partial \left( \frac{NU_\infty}{aRe^{1/2}} \right)}{\partial (ax)} - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x \\ &- \sigma (B_0)^2 \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) - \frac{\mu}{K^*} vU_\infty Re^{-1/2} \\ \Leftrightarrow &= -\rho \frac{U_\infty^2}{aRe^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \rho \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &- k \frac{U_\infty}{a^2 Re^{1/2}} \frac{\partial N}{\partial x} - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \sin x \\ &- \sigma (b + B_0)^2 \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) - \frac{\mu}{K^*} vU_\infty Re^{-1/2} \end{aligned}$$

Dengan Menyamakan Sisi Ruas Kiri dan Ruas Kanan dan selanjutnya membagi kedua sisi dengan  $\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}}$ , maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1+K)}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\alpha T}{Re^{1/2}} \cos x \\ &+ \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re^2} \frac{\partial N}{\partial x} - \left( \frac{M+\Phi}{Re} \right) v \end{aligned}$$

Dalam hal ini,  $M = \frac{a\sigma(B_0)^2}{\rho U_\infty}$ ,  $\Phi = \frac{a\mu}{\rho U_\infty K^*}$ ,  $K = \frac{k}{\mu}$ , dan  $\alpha = \frac{Gr}{Re}$  dengan  $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v^2}$ .

(c) Persamaan Momentum Angular.

$$\rho I \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Sisi Ruas Kiri

$$\begin{aligned} \rho I \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho I \left( \frac{\partial \left( \frac{NU_\infty}{a Re^{-1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{at}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\partial \left( \frac{NU_\infty}{a Re^{-1/2}} \right)}{\partial (ax)} \right. \\ &+ \left. \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\partial \left( \frac{NU_\infty}{a Re^{-1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} \right) \\ \Leftrightarrow &= \rho I \left( \frac{\left( \frac{U_\infty}{a Re^{-1/2}} \right) \frac{\partial N}{\partial t}}{\left( \frac{a}{U_\infty} \right)} + (uU_\infty) \frac{\left( \frac{U_\infty}{a Re^{-1/2}} \right) \frac{\partial N}{\partial x}}{(a)} \right. \\ &+ \left. \left( \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \right) \frac{\left( \frac{U_\infty}{a Re^{-1/2}} \right) \frac{\partial N}{\partial y}}{\left( \frac{a}{Re^{1/2}} \right)} \right) \\ \Leftrightarrow &= \rho I \left( \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial x} \right. \\ &+ \left. v \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ \Leftrightarrow &= \rho I \left( \frac{U_\infty^2}{a^2 Re^{-1/2}} \right) \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Sisi Ruas Kanan

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) &- k \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \\ &= \left( \mu + \frac{K\mu}{2} \right) I \left( \frac{\partial^2 NU_\infty Re^{1/2}}{\partial x^2 a^2 a} + \frac{\partial^2 NU_\infty Re^{1/2}}{\partial y^2 a^2 (Re^{1/2})^2 a} \right) \\ &- (K\mu) I \left( 2 \frac{NU_\infty Re^{1/2}}{a} + \frac{\partial u U_\infty Re^{1/2}}{\partial a y a} - \frac{\partial v U_\infty}{\partial x a Re^{1/2}} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \mu I \left( \frac{U_\infty Re^{1/2}}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\ &- K\mu I \left( \frac{U_\infty}{a} 2N Re^{1/2} + \frac{U_\infty}{a} Re^{1/2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{U_\infty}{a} Re^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Dengan Menyamakan Sisi Ruas Kiri dan Ruas Kanan dan selanjutnya membagi kedua sisi dengan  $\rho I \frac{U_\infty^2}{a^2} Re^{1/2}$ , maka diperoleh sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) - K \left(2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

(d) Persamaan Energi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

Sisi Ruas Kiri

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) &= \rho C_p \left(\frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(taU_\infty^{-1})}\right) \\ &+ uU_\infty \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)} \\ &+ vU_\infty Re^{-1/2} \frac{\partial(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ayRe^{-1/2})} \\ &= \rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ &+ \rho C_p \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T_\infty}{\partial t} + u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial T_\infty}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Karena  $T_\infty$  adalah suatu konstanta, maka  $\frac{\partial T_\infty}{\partial t} = 0$ , sehingga ruas kiri dapat dituliskan menjadi :

$$\rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Sisi Ruas Kanan

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right) &= c \left(\frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ax)^2} + \frac{\partial^2(T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial(ayRe^{1/2})^2}\right) \\ &= c \left(\frac{(T_w - T_\infty)}{\partial a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{(T_w - T_\infty)}{\partial a^2} Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \\ &= c \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \end{aligned}$$

Dengan Menyamakan Sisi Ruas Kiri dan Ruas Kanan dan selanjutnya membagi kedua sisi dengan  $\frac{\rho C_p (T_w - T_\infty) U_\infty}{a}$ , maka

diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c}{aU_{\infty}\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{c}{aU_{\infty}\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{cRe}{aU_{\infty}\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
&= \frac{c}{aRe\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{cRe}{vRe\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

##### 5. Kecepatan Aliran Bebas (*Free Stream*)

Kecepatan aliran bebas (*Free Stream*) dalam bentuk koordinat bola (*Spherical*) adalah :

$$U_r = -U_{\infty} \cos(\theta) \quad (6.1)$$

$$U_{\theta} = U_{\infty} \sin(\theta) \quad (6.2)$$

$$U_{\Phi} = 0 \quad (6.3)$$

Streamline dari kecepatan dituliskan menjadi sebagai berikut (John, 2010):

$$U = \nabla\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} e_{\theta} + 0e_{\Phi} \quad (6.4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 6.1 ke 6.4 maka diperoleh :

$$U_r = -U_{\infty} \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = -(U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi r^3}) \cos \theta \quad (6.5)$$

$$U_{\theta} = U_{\infty} \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = (U_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi r^3}) \sin \theta \quad (6.6)$$

$$U_{\Phi} = 0 \quad (6.7)$$

Selanjutnya, dapat ditentukan titik stagnasi pada aliran fluida, diberikan  $U_r = U_{\theta} = 0$  . Pada Persamaan (4.124)  $U_{\theta} = 0$  diberikan  $\sin \theta = 0$ , dengan titik stagnasi terletak di  $\theta = 0$  dan  $\pi$ . Pada Persamaan (4.125) dengan  $U_r = 0$ , sehingga dapat diperoleh:

$$U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0 \quad (6.8)$$

dengan  $r = R$  merupakan koordinat jari-jari dari titik stagnasi. Untuk menyelesaikan Persamaan (6.8) maka diperoleh nilai R sebagai berikut :

$$R = \left( \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right)^{1/3} \quad (6.9)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (6.9) ke Persamaan (6.5) maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
U_r &= -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3}) \cos \theta \\
&= -(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} (\frac{2\pi U_\infty}{\mu})) \cos \theta \\
&= -(U_\infty - U_\infty) \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Dari Persamaan (6.10) diperoleh bahwa  $U_r = 0$  saat  $r = R$  untuk setiap nilai  $\theta$  dan  $\Phi$ . Daerah kecepatan yang diberikan pada Persamaan (6.5)-(4.121) adalah aliran *incompressible* yang melalui bola berjari-jari  $R$ . Pada permukaan bola dengan  $r = R$ , kecepatan tangensial didefinisikan pada Persamaan (4.120) sebagai berikut :

$$U_\theta = (U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}) \sin \theta \tag{6.11}$$

Selanjutnya, Persamaan (6.9) dapat dituliskan menjadi sebagai berikut:

$$\mu = 2\pi R^3 U_\infty \tag{6.12}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (6.12) ke Persamaan (6.11) maka diperoleh :

$$U_\theta = (U_\infty + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_\infty}{R^3}) \sin \theta \tag{6.13}$$

Atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$U_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta$$

## 6. Penurunan pada Fungsi Alir (*Stream Function*)

### (a) Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} (r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (-r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$



(b) Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \alpha T t \\
&- (M + \Phi)(u - u_e) + K \frac{\partial N}{\partial y} \\
\Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right. \\
&+ \left. \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y^2} \\
&- \frac{2}{3} \alpha T t - (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + K \frac{\partial N}{\partial y} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{2}{3} \alpha T t \\
&- (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + K \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}$$

(c) Persamaan Momentum Angular :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

(d) Persamaan Energi:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

## 7. Perhitungan Persamaan Similaritas.

Dengan menggunakan fungsi alir

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan variabel similaritas, sebagai berikut :

*Small time*

$$\Psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t), \quad T = s(x, \eta, t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}, \quad N = t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t)$$

Large time

$$\Psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t), \quad T = S(x, Y, t), \quad Y = y, \quad N = u_e(x)H(x, Y, t)$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

(a) Persamaan Momentum.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha T \sin x \\ &+ K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \Phi)(u - u_e) \end{aligned}$$

Sisi Ruas Kiri

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Sisi Ruas Kanan

$$\begin{aligned} &u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \alpha T + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \Phi)(u - u_e) \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{2}{3} \alpha T + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t^{1/2}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{2} y t^{-3/2} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \frac{1}{t^{1/2}} \\ &= t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ &= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial x} \\ &= t^{1/2} \frac{\partial (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial x} \\ &= t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial (u_e(x) r(x))}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\ &= t^{1/2} f(x, \eta, t) \left( r(x) \frac{\partial (u_e(x))}{\partial x} + u_e(x) \frac{\partial (r(x))}{\partial x} \right) + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\ &= r(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial (u_e(x))}{\partial x} + u_e(x) t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial (r(x))}{\partial x} \\ &+ t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \frac{1}{t^{1/2}} \\
&= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= \left( \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
&= r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
&\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
&= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{u_e(x)r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}$$

Selanjutnya, dapat dituliskan  $u_e(x) = u_e$ ,  $r(x) = r$ ,  $f(x, \eta, t) = f$  sehingga Persamaan similaritas untuk persamaan momentum dapat diperoleh sebagai berikut :

Sisi Ruas Kiri :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{r} \left( -\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\ &- \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\ &- \frac{1}{r^2} \left( t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ &= -\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\ &+ \frac{u_e}{r} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\ &- \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} u_e^2 r^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\ &- \left( \frac{u_e}{r t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \left( t^{1/2} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} + t^{1/2} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\ &+ \frac{u_e}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} u_e^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \\ &- \frac{u_e^2}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Sisi Ruas Kanan :

$$\begin{aligned} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} &+ (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{2}{3} \alpha T u_e - (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - u_e \right) + K \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \frac{1}{r} \left( \frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{2}{3} \alpha T u_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (M + \Phi) \left( \left( \frac{1}{r} (u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta}) \right) - u_e \right) + K \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + (1 + K) \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) - \frac{2}{3} \alpha T u_e \\
& - (M + \Phi) \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + K \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Dengan Menyamakan Sisi Ruas Kiri dan Ruas Kanan dan Selanjutnya membagi kedua sisi dengan  $\frac{u_e}{t}$ , maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} & + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
& + (M + \Phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial t} - \frac{2}{3} \alpha s t \\
& + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

(b) Persamaan Angular

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) & = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right) & = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} & = \frac{\partial(t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& = t^{-1/2} u_e(x) \frac{\partial(h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} \\
& = \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial(h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_e(x)}{t} \frac{\partial(h(x, \eta, t))}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
& = \frac{u_e(x)}{t} \frac{1}{t^{1/2}} \left( \frac{\partial^2(h(x, \eta, t))}{\partial \eta^2} \right) = \frac{u_e(x)}{t^{3/2}} \left( \frac{\partial^2(h(x, \eta, t))}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan  $h(x, \eta, t) = h$  sehingga Persamaan Similaritas untuk Persamaan Angular dapat diperoleh :

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} & + \frac{\eta \partial h}{2 \partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} \\
& + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
& + t K \left( 2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

(c) Persamaan Energi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{t^{1/2}} \left( \frac{1}{t^{1/2}} \right) = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dituliskan  $s(x, \eta, t) = s$  sehingga Persamaan Similaritas untuk Persamaan Energi dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} (r t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{1/2} f \frac{\partial r}{\partial x} t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x}) \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\ -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \left( f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mengkalikan kedua sisi dengan  $Pr t$  sehingga diperoleh Persamaan Energi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} -Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Pr t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \\ = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr \eta \partial s}{2 \partial \eta} + Pr t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ = Pr t \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned}$$

## 8. Perhitungan Persamaan Similaritas 2 Dimensi

$$\begin{aligned}
(1+K)\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} &+ \frac{\eta \partial^2 f}{2\partial \eta^2} + t \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&+ (M + \Phi)t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \frac{2}{3} \alpha st \\
&+ t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan  $u_e(x) = \frac{3}{2} \sin x$ ,  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2} \cos x$ ,  $r = \sin x$ , dan  $\frac{dr}{dx} = \cos x$

$$\begin{aligned}
(1+K)\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} &+ \frac{\eta \partial^2 f}{2\partial \eta^2} + \frac{3}{2} \cos x \, t \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + K \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&+ (M + \Phi)t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \frac{2}{3} \alpha st \\
&+ \frac{3}{2} \sin x \, t \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

## 9. Penurunan Kondisi Awal

### (a) Persamaan Momentum Linear

$$\begin{aligned}
(1+K)f''' &+ \frac{\eta}{2} f'' + \frac{3}{2} t \left[ 1 - (f')^2 + f f'' \right] + K h' \\
&+ (M + \Phi)t(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{2}{3} \alpha st
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan  $t = 0$  maka diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$(1+K)f''' + \frac{\eta}{2} f'' + K h' = 0$$

Selanjutnya, dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan  $f'$  dengan memisalkan  $f'' = s$  sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$(1+K)s' + \frac{\eta}{2} s + K h' = 0$$

karena  $h = -n f''$  maka diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(1+K)s' + \frac{\eta}{2} s + K n s' &= 0 \\
(1+K(1-n))s' + \frac{\eta}{2} s &= 0
\end{aligned}$$

dengan  $s' = \frac{ds}{d\eta}$  maka diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\frac{(1+K(1-n))}{s} ds + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

Selanjutnya, kedua sisi diintegrasikan sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}\frac{(1+K(1-n))}{s} \ln s + \frac{\eta^2}{4} &= c_1 \\ \frac{(1+K(1-n))}{s} \ln s &= c_1 - \frac{\eta^2}{4} \\ \ln s &= \frac{c_1}{(1+K(1-n))} - \frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))} \\ s &= e^{(\frac{c_1}{(1+K(1-n))} - \frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))})}\end{aligned}$$

karena  $s = f''$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned}f' &= \int e^{(\frac{c_1}{(1+K(1-n))} - \frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))})} d\eta \\ &= e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} d\eta\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf), yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{c}x)$$

sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned}f' &= e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \left( \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot \frac{1}{4(1+K(1-n))}}} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \right) \\ f' &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2(1+K(1-n))} \right) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} + c_2\end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{aligned}t > 0 ; f = f' = 0 ; h = -\eta f'' ; s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ f' &= 1 ; s = 0 ; h = 0 ; \text{ pada } \eta \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai dari  $c_2$  dengan mensubstitusikan kondisi batas  $f' = 0$  pada saat  $\eta = 0$ .

$$\begin{aligned}f' &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2(1+K(1-n))} \right) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} + c_2 \\ c_2 &= 0\end{aligned}$$

Selanjutnya, pada saat  $f' = 1$  dan  $\eta \rightarrow \infty$  diperoleh  $e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}}$ , dengan  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ , maka diperoleh :

$$\begin{aligned}f' &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2(1+K(1-n))} \right) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \\ 1 &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} \operatorname{erf}(\infty) e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \\ 1 &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} \\ e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}}\end{aligned}$$



Selanjutnya, dengan melakukan substitusi  $c_2$  dan  $e^{\frac{c_1}{(1+K(1-n))}}$  pada  $f'$ , maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f' &= \sqrt{\pi(1+K(1-n))} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} \\ f' &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mengintegalkan  $f'$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) d\eta \\ &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} (e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}) + c_3 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan melakukan substitusi  $f = 1$  pada saat  $\eta \rightarrow \infty$ , maka diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} (e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}) + c_3 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh :

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right) + 2\sqrt{\frac{(1+K(1-n))}{\pi}} (e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} - 1)$$

Selanjutnya, dengan menurunkan  $f'$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{df'}{d\eta} \\ &= \frac{d}{d\eta} (\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right)) \\ &= (\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2(1+K(1-n))}\right)) \\ f'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menurunkan  $f''$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} f''' &= \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \right) \\ f''' &= -\frac{\eta}{2(1+K(1-n))\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}} \end{aligned}$$

- (b) Persamaan Momentum Angular Dengan menggunakan  $h = -nf''$ , maka diperoleh :

$$h = -n \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

dan dengan menggunakan  $h' = -nf'''$ , maka diperoleh :

$$h' = \frac{-n\eta}{2(1+K(1-n)) \sqrt{\pi(1+K(1-n))}} e^{\frac{\eta^2}{4(1+K(1-n))}}$$

- (c) Persamaan Energi

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' + \frac{3}{2}Prtf s' = Prt \frac{\partial s}{\partial t}$$

dengan mensubstitusikan  $t = 0$  maka diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' = 0$$

Selanjutnya, dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan  $s$  dengan memisalkan  $s' = k$  sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$k' + \frac{Pr\eta}{2}k = 0$$

dengan  $k' = \frac{dk}{d\eta}$  maka diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\frac{1}{k} + \frac{Pr\eta}{2}d\eta = 0$$

Selanjutnya, kedua sisi diintegalkan sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \ln k + \frac{Pr\eta^2}{4} &= c_4 \\ \ln k &= -\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4 \\ k &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4} \\ k &= e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \end{aligned}$$

karena  $k = s'$  maka diperoleh :

$$\begin{aligned} s' &= e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \\ s &= \int e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \\ s &= e^{c_4} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf), yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} s &= e^{c_4} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \\ &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5 \end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{aligned} t &> 0 ; f = f' = 0 ; h = -\eta f'' ; s = 1, \text{ pada } \eta = 0 \\ f' &= 1 ; s = 0 ; h = 0 ; \text{ pada } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai  $e^{c_4}$  dan  $c_5$  pada saat  $\eta = 0$ .

$$\begin{aligned} s &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5 \\ 1 &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(0) + c_5 \\ c_5 &= 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya, pada saat  $\eta \rightarrow \infty$ , maka diperoleh :

$$\begin{aligned} s &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5 \\ 0 &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\infty) + 1 \\ e^{c_4} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan  $e^{c_4}$  dan  $c_5$  ke  $s$  sehingga diperoleh Kondisi Awal Persamaan Energi adalah :

$$\begin{aligned} s &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + 1 \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + 1 \\ s' &= -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \end{aligned}$$

## 10. Perolehan pada Diskritisasi Model

(a) *Small time*

i. Persamaan Momentum Linear

Untuk persamaan momentum linier (5.5) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [(1+K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - (u)^2 + fv] + Kz \\ &+ (M + \Phi)t(1 - u) + \frac{2}{3}\alpha st]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= (1+K)\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K(z_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ &+ \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n] \\ &+ (M + \Phi)t^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1+K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - (u)^2 + fv] + Kz \\ &+ (M + \Phi)t(1 - u) + \frac{2}{3}\alpha st]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= (1+K)\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + K(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\ &+ \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\ &+ (M + \Phi)t^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &(1+K)\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K(z_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ &+ \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n] + (M + \Phi)t^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ &+ \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n + (1+K)\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\ &+ K(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\ &+ (M + \Phi)t^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} t^{n-1} \\ &= 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& (1+K)\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^n) + K(z_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& + \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n] + (M + \Phi)t^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& + \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^n t^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1+K)\frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - K(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
& - (M + \Phi)t^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{2}{3}\alpha s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}t^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

ii. Persamaan Momentum Angular

Untuk persamaan Momentum Angular (5.6) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}}\left[\frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n}\right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[(1 + \frac{K}{2})z' + \frac{\eta}{2}z + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fz - hu) \right. \\
&\quad \left. - tK(2h + v)\right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1 + \frac{K}{2})\frac{(z_j^n - z_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(z_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&\quad + \frac{3}{2}t^n(f_{j-\frac{1}{2}}^n z_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&\quad - t^n K(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[(1 + \frac{K}{2})z' + \frac{\eta}{2}z + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}t(fz - hu) \right. \\
&\quad \left. - tK(2h + v)\right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1 + \frac{K}{2})\frac{(z_j^{n-1} - z_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}(z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad + \frac{3}{2}t^{n-1}(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad - t^{n-1} K(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& (1 + \frac{K}{2}) \frac{(z_j^n - z_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (z_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + \frac{3}{2} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n z_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) - t^n K (2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& + (1 + \frac{K}{2}) \frac{(z_j^{n-1} - z_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& + \frac{3}{2} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& - t^{n-1} K (2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) = 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& (1 + \frac{K}{2}) \frac{(z_j^n - z_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (z_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + \frac{3}{2} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n z_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) - t^n K (2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = -(1 + \frac{K}{2}) \frac{(z_j^{n-1} - z_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} (z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& - \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& + t^{n-1} K (2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

### iii. Persamaan Energi

Untuk persamaan Energi (5.7) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} [(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_3)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = Pr t^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{s_{j-\frac{1}{2}}^n - s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [q' + \frac{Pr\eta}{2} q + \frac{3}{2} Pr t f q]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= \left( \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&+ \frac{3}{2} Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [q' + \frac{Pr\eta}{2} q + \frac{3}{2} Pr t f q]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= \left( \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&+ \frac{3}{2} Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2} Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& = 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - \frac{3}{2} Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

(b) *Large time*

i. Persamaan Momentum Linear

Untuk persamaan momentum linier (5.12) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} [(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{U_{j-\frac{1}{2}}^n - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [(1+K)V' + \frac{3}{2}[1 - (U)^2 + FV] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F') + KZ - \frac{2}{3}\alpha St]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1+K)\left(\frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j}\right) + KZ_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&+ \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n t^n
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1+K)V' + \frac{3}{2}[1 - (U)^2 + FV] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F') + KZ - \frac{2}{3}\alpha St]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1+K)\left(\frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j}\right) + KZ_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&+ \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}t^{n-1}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(1+K)\left(\frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j}\right) + KZ_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n t^n + (1+K)\left(\frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j}\right) \\
&+ KZ_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}t^{n-1} = 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(1+K)\left(\frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j}\right) + KZ_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&+ (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n t^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= -(1+K)\left(\frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j}\right) - KZ_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&- \frac{3}{2}[1 - (U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] - (M + \Phi)(1 - F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&+ \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}t^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

ii. Persamaan Momentum Angular

Untuk persamaan Momentum Angular (5.13) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}}\left[\frac{H_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n}\right]$$



dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [(1 + \frac{K}{2})Z' + \frac{3}{2}(FZ - HU) + K(2H + V)]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^n - Z_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^n Z_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&\quad + K(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1 + \frac{K}{2})Z' + \frac{3}{2}(FZ - HU) + K(2H + V)]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^{n-1} - Z_{j-1}^{n-1})}{l_j}) + \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
&\quad + K(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^n - Z_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^n Z_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&\quad + K(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n) + (1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^{n-1} - Z_{j-1}^{n-1})}{l_j}) \\
&\quad + \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] + K(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&= 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^n - Z_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^n Z_{j-\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n U_{j-\frac{1}{2}}^n] \\
&\quad + K(2H_{j-\frac{1}{2}}^n + V_{j-\frac{1}{2}}^n) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= -(1 + \frac{K}{2})(\frac{(Z_j^{n-1} - Z_{j-1}^{n-1})}{l_j}) - \frac{3}{2}[F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Z_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] \\
&\quad - K(2H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} H_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

iii. Persamaan Energi

Untuk persamaan Energi(5.14) adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}[(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_3)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = Prt^{n-\frac{1}{2}}[\frac{S_{j-\frac{1}{2}}^n - S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n}]$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [Q' + \frac{3}{2}PrFQ]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(L_3)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [Q' + \frac{3}{2}PrFQ]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (\frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j}) + \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n + (\frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j}) \\
&+ \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j}) + \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= -(\frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j}) - \frac{3}{2}PrF_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

#### 11. Perolehan pada Pelinieran Model

Untuk *Small Time*

(a)

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

(b)

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

(c)

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

(d)

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta z_j - \delta z_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(z_j^n - z_{j-1}^n)$$

(e)

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left( \frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + K \left( \frac{\delta z_j + \delta z_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} t^n u_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} t^n f^n \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} t^n v_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + \\
& (M + \Phi) t^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \frac{2}{3} \alpha t^n \left( \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -(1 + K) \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} (v_{j-1/2}^n) - K (z_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{3}{2} t^n [1 - (u_{j-1/2}^n)^2 + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n] - (M + \Phi) t^n (1 - u_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{2}{3} \alpha s_{j-1/2}^n t^n + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-1/2}^n + R_1
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
& \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{\delta z_j - \delta z_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2} \left( \frac{\delta z_j + \delta z_{j-1}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} t^n f_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta z_j + \delta z_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} t^n z_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta z_j + \delta z_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n h_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \\
& \frac{3}{2} t^n u_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} t^n \left( \frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \\
& 2 t^n K \left( \frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) - t^n K \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta h_j + \delta h_{j-1}}{2} \right) \\
& = - \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-1/2}}{2} z_{j-1/2}^n - \frac{1}{2} h_{j-1/2}^n - \\
& \frac{3}{2} t^n [f_{j-1/2}^n z_{j-1/2}^n - h_{j-1/2}^n u_{j-1/2}^n] + t^n K (2 h_{j-1/2}^n + v_{j-1/2}^n) + \\
& 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} h_{j-1/2}^n + R_2
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \quad (6.15) \\
& \frac{3}{2} Pr t^n f_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} Pr t^n q_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} Pr t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) \\
& = - \left( \frac{q_j^n + q_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{Pr}{2} \eta_{j-1/2} q_{j-1/2}^n - \frac{3}{2} Pr t^n (f_{j-1/2}^n q_{j-1/2}^n) \\
& + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} s_{j-1/2}^n + R_3
\end{aligned}$$

Untuk *Large Time*

(a)

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta U_j - \delta U_{j-1}) = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

(b)

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta V_j - \delta V_{j-1}) = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n)$$

(c)

$$(\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n)$$

(d)

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta Z_j - \delta Z_{j-1}) = -(H_j^n - H_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (Z_j^n - Z_{j-1}^n)$$

(e)

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left( \frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{l_j} \right) + K \left( \frac{\delta Z_j + \delta Z_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} U_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} F^n \left( \frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2} \right) + \\
& \frac{3}{2} V_{j-1/2}^n \left( \frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2} \right) + \\
& (M + \Phi) \left( \frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2} \right) + \frac{2}{3} \alpha t^n \left( \frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left( \frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2} \right) \\
& = -(1 + K) \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) - K(Z_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{3}{2} [1 - (U_{j-1/2}^n)^2 + F_{j-1/2}^n V_{j-1/2}^n] - (M + \Phi) (1 - U_{j-1/2}^n) - \\
& \frac{2}{3} \alpha S_{j-1/2}^n t^n + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} U_{j-1/2}^n + R_1
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{\delta Z_j - \delta Z_{j-1}}{l_j}\right) + \\
& \frac{3}{2} F_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta Z_j + \delta Z_{j-1}}{2}\right) + \frac{3}{2} Z_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) + \\
& \frac{3}{2} \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta Z_j + \delta Z_{j-1}}{2}\right) - \frac{3}{2} t^n H_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - \\
& \frac{3}{2} U_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta U_j + \delta U_{j-1}}{2}\right) - \\
& 2K \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) - K \left(\frac{\delta V_j + \delta V_{j-1}}{2}\right) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left(\frac{\delta H_j + \delta H_{j-1}}{2}\right) \\
& = - \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left(\frac{Z_j^n - Z_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{3}{2} [F_{j-1/2}^n Z_{j-1/2}^n - H_{j-1/2}^n U_{j-1/2}^n] + \\
& K (2H_{j-1/2}^n + V_{j-1/2}^n) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} H_{j-1/2}^n + R_2
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\delta Q_j - \delta Q_{j-1}}{l_j}\right) + \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) + \frac{3}{2} Pr F_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) + \\
& \frac{3}{2} Pr Q_{j-1/2}^n \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) + \frac{3}{2} Pr \left(\frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2}\right) \left(\frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2}\right) - \\
& 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} \left(\frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2}\right) = - \left(\frac{Q_j^n + Q_{j-1}^n}{l_j}\right) - \\
& \frac{3}{2} Pr (F_{j-1/2}^n Q_{j-1/2}^n) + 2 \frac{Pr t^{n-1/2}}{k^n} S_{j-1/2}^n + R_3
\end{aligned}$$



## BIOGRAFI PENULIS



Penulis bernama Charisma Juni Kumalasari, lahir di Nganjuk, 11 Juni 1994. Penulis merupakan anak terakhir dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Nawa-Kartika (1997-1999), SDN Dawu 2 Ngawi (1999-2005), SMP Negeri 1 Ngawi (2005-2008), dan SMA Negeri 2 Ngawi (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2011 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS Surabaya melalui jalur Undangan dengan NRP 1211 100 032. Di Departemen Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staf Depart. Hubungan Luar (2012-2014) dan UKM Taekwondo ITS sebagai Sekretaris Umum (2012-2013). Selanjutnya, pada tahun 2016 penulis melanjutkan studi ke jenjang S2 di Departemen Matematika ITS Surabaya dengan NRP 061116500120001. Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: [charisma.juni11@gmail.com](mailto:charisma.juni11@gmail.com)